2009-09-05 & 2009-10-03 担当:中西
2009-10-05,10-15, 2010-05-19 修正

Foundations of Measurement: Chapter 1

Introduction

1.1 THREE BASIC PROCEDURES OF FUNDAMENTAL MEASUREMENT

一群のオブジェクト[objects]（あるいはイベント[events]）の属性を測定しようとするとき私たちは、その属性のプロパティ[property]が数的プロパティとして忠実に表現[represent]されるような仕方で、数（あるいはその他なじみの数学的エンティティ、たとえばベクトル）をオブジェクトに結びつける。

この本（のシリーズ）では、この意味での測定を可能ならしめる、属性の形式的プロパティの系[system]を色々と紹介する。

物理学的測定について解説者が言うことには、

基礎的測定[”fundamental” measure]: 他の量を前もって測定する必要がないもの

例) 「長さ」は fundamentally に測定される。「密度」は質量÷体積であり、これらの前もった測定に依存する。

属性が基礎的測度[”fundamental” measure]を有するためには、属性は一意な形式的プロパティセットを示さなければならない

らしい。

この”fundamental” or not の区別もわかりにくいのだが、それは置いておいても、数的測定を可能とするのに充分なプロパティの系がたった１つしかないと考えるのは誤りだ。

系は多様にあり得るといっても、属性の質的観察を元にオブジェクト（あるいはイベント）に数を割り当てることに関して、我々の知っている基本的手続きはたった 3 つである。これら 3 つが 2〜13 章で登場する系の基盤である。

具体性のため、以降、長さの測定を例に考える。

まっすぐで硬い棒きれの集合を思い浮かべよう。それらの棒の長さを測ることに関心があるとする。

棒 a と b をそばにならべて置いて片方の端をそろえたとき、ある場合にはもう一方の端で a のほうが b を超えて飛び出ていたり、b のほうが出ていたり、a と b の端がちょうど一致しているように見えたりするだろう。これらをそれぞれ、a が b より長い、b が a より長い、

a と b は長さが同じである、と私たちは言っている。記号では、$a \succ b$、$b \succ a$、$a \sim b$ と書くことにする。
2 つ以上の棒は連結[concatenate]することができる。つまり、端と端をあわせてまっすぐ一列にならべるということ。a と b の連結は記号で $a \circ b$ と書くことにする。
連結された棒も、単体の棒と同じように、そばにならべ置いて質的に長さを比較できる。棒 c が $a \circ b$ より長いという観察は、$c \succ a \circ b$ と書く。

長さの比較や棒の連結について、多くの経験的プロパティが定式化できる:

例)

$\succ$ は推移律[transitivity]を満たす

$\circ$ は結合律[associativity]を満たす

$a \succ b \Rightarrow a \circ c \succ b$

など。

ここではこれらのプロパティを一覧しないが、以下の直観的議論では自由に使っていくのでそのつもりで。

1.1.1 Ordinal Measurement

長さの順序をはかろうとする場合、（連結していない）棒たちを比較して、その結果を反映するように棒 a, b 等々に数 $\phi(a), \phi(b)$ 等々を割り当てる。
つまり、

$$a \succ b \Leftrightarrow \phi(a) > \phi(b)$$

を満たすように数を割り当てる。[1]
注：ここでは連結の情報は一切用いていない。

数の割り当ての自然な手続きとしては、

1) 1 つ目の棒に割り当てる数を任意に決める。
2) 2 つ目の棒を 1 つ目と比較して、長いならより大きい数を、短いならより小さい任意の数を割り当てる。
3) 3 つ目以降の棒も同様。最初の 2 つの間の長さなら、間の任意の数を割り当てる。

この手続きは無限に続けることができる。初めのほうの棒への数の割り当ては、その後の

---

[1] 発註: 「この本での理論のベースとして」この条件を要求しようとしていると受け取るべき。我々が順序の測定に関心があるときはいつもこの条件が不可欠かというと、それは怪しい。とくに、$>$ と $\geq$ の違いや、$R(a,b) \Rightarrow S(\phi(a), \phi(b))$ と $R(a,b) \Leftarrow S(\phi(a), \phi(b))$ 両方を求める点。1.2.2 節の脚注も参照。

比較観察のことまったく考慮しなくて良い。なぜなら、実数を割り当てるのであれば、この手続きが要する数は必ず存在するから。

難点：

$a \succ b$ でも $b \succ a$ でもないような、すなわち $a \sim b$ となる、棒 a,b が存在する場合。

比較では順序が確立できないため、長さは同じだと考え、a と b に同じ数を割り当てたくなる。

しかしもし大小関係を確かめる比較過程が長さの小さな違いに対して敏感でないのであれば、$b \sim c$、$c \sim d$、$b \succ d$ となることもありえる。

この関係を数で表現しようとすると、$\phi(b) = \phi(c)$、$\phi(c) = \phi(d)$、$\phi(b) > \phi(d)$ となり、これは不可能である。

従って、

順序測定の手続きは、対象の棒たちの間の違い以上に比較過程が敏感である場合にのみ適したものである。理想としては、厳密に用意された“perfect copy”（例えばメートル棒やその上の目盛り区間みたいな）でないかぎり、2 つの棒 a,b にて $a \succ b$ または $b \succ a$ が必ず成り立ってほしい。

もちろん、真の perfect copy を用意することはできない。その上、物理的差異が充分に小さいなら、いかなる観察方法であってもそれを見分けられない。2 つの充分に似通ったエンティティの観察では、同じ観察を何度か繰り返したとき、一貫しない場合がある（おそらくすべての場合そうであろう）。よって推移律を破ることになる。

しかし、もし $\succ$ を確かめるのに使っている”working”な方法よりも敏感である”standard”な方法で copy が用意され、棒の集合が制限されてそのような標準化された copy 以外では $a \succ b$ または $b \succ a$ が成り立つならば、上記の理想的ケースは達成される。

◆15 章では $\sim$ は推移的でないが $\succ$ は推移的であるという場合について議論される。

比較過程がこのようなプロパティを持った $\succ$ と $\sim$ を成立させ、オブジェクトの集合が有限であるなら、棒の長さでなくとも、いかなるオブジェクトの属性についても上の手続きは適用できる。

◆2 章 1 節で、可算順序集合上の尺度 φ では $\sim$ は推移的でないが $\succ$ は推移的であるという場合について議論される。

しかし例えば、直接比較できないオブジェクトのペアたちに対してどう尺度を作ればいいかは明白でない。$\succ$ を”revealed preference”[顕示選好]の観察から推測するケースは経済学で研究されてきたが、この本ではこのような問題は扱わない。

1.1.2 Counting of Units

順序に加えて連結を考慮に入れるなら、数の割り当てにもう少し制約を加えるのが自然である。

a', a'', a''' 等々を棒 a の perfect copy としよう。
$a \circ a' \succ b$ かつ $b \succ a$ のときに、$\phi(a \circ a') > \phi(b) > \phi(a) = \phi(a')$ となるよう数を当てるだけでなく、$\phi(a \circ a') = 2\phi(a)$ となるようにしたい。
すると、$\phi(b)$ を $\phi(a)$ と $2\phi(a)$ の間の数とすることになる。
同様に、$a \circ a' \circ a'' \circ a''' \succ b$ かつ $b \succ a \circ a' \circ a''$ のときには、$\phi(b)$ は $3\phi(a)$ と $4\phi(a)$ の間の数となる。

系列 a、$2a = a \circ a'$、$3a = (2a) \circ a''$、$4a$、$5a$、$\cdots$ は a 上の標準系列[standard sequence]と呼ばれる。

　ミリメートルで目盛りが刻まれたメートル棒は、1 ミリメートル棒の標準系列の最初の 1000 個とみなせる。

棒 b が na と $(n+1)a$ の間（例えば 480 と 481 の間）であるのを観察したとき、$n\phi(a)$ と $(n+1)\phi(a)$ の間の数を割り当てる。

　上の例では、$\phi(a)$ は 1 ミリメートルの棒に割り当てる数である。

$\phi(a)$ の値は、長さの単位を決める特定の棒（e と書くことにする）の選択に依存し、$e \sim ma$ のとき、$\phi(a) = 1/m$ である。

　上の例では、e をメートル棒とするなら、$m = 1000$ であり、b には 0.480 と 0.481 の間の数を割り当てなければならない。

　e をセンチメートル棒とするなら、$m = 10$ であり、$\phi(b)$ は 48.0 と 48.1 の間である。

単位を固定したまま、より細かい標準系列を用いることで、$\phi(b)$ の入りうる区間をどんどん小さくできる。

　◆2 章 2 節、推定値の収束

順序測定では、棒の集合を限定し $a \succ b$ または $b \succ a$ が必ず成り立つようにして、$\sim$ の推移律の問題を回避できたが、標準系列では copy は必須なので、1 章 1.1 節での問題が当てはまる。

標準系列による counting 手続きの 3 つのプロパティ

1. 得られた数はsatisfactoryな<u>順序測度</u>となる:

$b \succ c$ のとき、充分に細かい a の標準系列にて $b \succ na$ かつ $na \succ c$ となり、結果 $\phi(b) > \phi(na) > \phi(c)$ となる。これは前述の $b \succ c \Leftrightarrow \phi(b) > \phi(c)$ を満たす。

2. 割り当てられた数は連結に関して加法的である:

   $\phi(b \circ c) = \phi(b) + \phi(c)$

   b に近づくのに a の n 個の copy が連結され、c に近づくのに n' 個が連結されねばならないとき、a の $n + n'$ 個の連結は b と c の連結に近づく。

   この加法性は、荒い標準系列においては近似的なものであり、系列が細かくなるほど正確になる。

3. 単位の選択にかかわらず、割り当てられる数の比は一意に決まる

   b に近づくのに a の n 個の copy が連結され、c に近づくのに n' 個が連結されねばならないとき、n / n' は $\phi(b) / \phi(c)$ に近似し、系列が細かくなるほど正確になる。

このテクニックは、関係 $\succ$ と連結 $\circ$ の両方が経験的に定義されている同様の状況ならば適用することができる。その場合、その属性は外延的に[extensively]測定される、と言う。

◆3 章を参照

同じ基本的テクニックは他の手法においても用いられる

◆1 章 3.2 節、4〜8 章、12 章、13 章を参照

1.1.3 Solving Inequalities

比較される棒（やその連結）の集合が予め限定されており、また、標準系列を作って精緻なことをするのが実践的でない場合に。

棒 $a_1, a_2, \ldots, a_5$ が次を満たすとわかったとする:

$$a_1 \circ a_5 \succ a_3 \circ a_4 \succ a_1 \circ a_2 \succ a_5 \succ a_4 \succ a_3 \succ a_2 \succ a_1 \qquad \cdots(1)$$

a_i の長さの未知の値を $x_i = \phi(a_i), \quad i = 1, \ldots, 5$ とする。これは次の連立線形不等式を満たさなければならない:

$$\begin{aligned} x_1 + x_5 - x_3 - x_4 &> 0 \\ x_3 + x_4 - x_1 - x_2 &> 0 \\ x_1 + x_2 - x_5 &> 0 \\ x_5 - x_4 &> 0 \qquad \cdots(2) \\ x_4 - x_3 &> 0 \\ x_3 - x_2 &> 0 \\ x_2 - x_1 &> 0 \end{aligned}$$

この 5 変数 7 本の連立不等式の解が、$a_1, a_2, \ldots, a_5$ の長さの値とできるものの集合である。

解を見つけることで 5 つの棒をはかることができる。
また、式変形によって、割り当てられる数の比の上限、下限を得ることができる。

例) 上の連立不等式では、$1 < x_3 / x_2 < 3/2$ である（◆エクセサイズ 1）

(1)の観察をもとに(2)の連立不等式を作るとき、連結$\circ$は実数の加算$+$に、関係$\succ$は実数の順序$>$に翻訳される。この翻訳は前節のプロパティ 1.と 2.を用いている。つまり、標準系列のカウンティングで長さを測ることは、連結$b \circ c$に合計$\phi(b)+\phi(c)$を割り当てるものであり、数の順序が観察の順序を保つものである。
不等式を解くことでの測定は、これら 2 つのプロパティが数の割り当てにて満たされることを仮定する。それによって解くことが可能になる。
不等式を解く測定は多くの応用がある（◆9 章を参照）。場合によっては加算よりも複雑な演算を経験的概念に対応させることもあるが、その場合、非線形の不等式となる。

1.2 THE PROBLEM OF FOUNDATIONS

1.2.1 Qualitative Assumptions: Axioms

標準系列手続きが矛盾無く行われるためには、$\circ$と$\succ$はどんな基本的仮定を満たさなければならないか？

1.1 節にて$a \succ b \Rightarrow a \circ c \succ b$が例に挙げられたが、カウンティング手続きでは他にも暗黙に用いている。

例えば、a の標準系列にて$(n+1)a \succ b$ かつ $b \succ na$ となる要素 na と $(n+1)a$ を探すとき、整数 n が一意であることが保証されている必要がある。
$(n+1)a \succ b$ ならば $(n+2)a \succ b$ 等々、標準系列の後続の要素も b より大きいと私たちは推論するが、これは$\succ$の推移性に依存している。
また、a は b に対して無限小であってはならない。などなど。

測定手続きをきちんと理解するためには、全ての仮定を明示的にしなければならない。
明示的になれば、同じ測定手続きが新しい領域に適用可能[applicable]かどうかの判定は、必要なプロパティが満たされているかどうかのテストへ還元できる。
さらに、もし必要なプロパティのほとんどがいくつかの基本的プロパティから演繹できるなら、適用可能性はその少数のプロパティが満たされているかで判断できる。

(1)+(3)+(5)+(7)×2

この論理的ステップは公理化[axiomatization]と呼ばれる。そこから他のすべてのプロパティが演繹できる少数の明示的プロパティは、公理[axioms]と呼ばれる。
公理化の仕方は複数あるので、「良い」公理化の基準をのちに議論する。

測定の基礎づけの仕事は特定の測定手続き[procedure]が要求する仮定の明示化と体系化だと見るのは自然ではあるが、間違っている。

例えば、経験的な連結操作が標準系列手続きにとって必須である、基礎的測定とは経験的な連結操作を伴った手続きのことである、心理学ではその意味で基礎的な測定は不可能だ、などと考える人たちがいた。

これが間違っていることを示す例はこの本でたくさん登場する。

1.2.2 Homomorphisms of Relational Structures: Representation Theorems

測定の基礎づけとは、割り当てを行う手続きではなく、数の割り当てのプロパティに焦点を置くものだ。
例えば、棒の集合、その上の比較関係$\succ$、連結$\circ$に関して、$\succ$と$\circ$についてのどんな仮定が順序保存的で加法的な（1.1.2 節のプロパティ 1 と 2）実数値関数の構築に必要/充分であるのか？
これは公理化（$\succ$と$\circ$のプロパティの列挙）を要するが、目指している結論は、ある手続きが可能かどうかでなく、プロパティを満たすような関数ϕが存在するかどうか、である。
数の割り当てに用いられる手続き（ϕの構成手続き）は特定されず、様々な手続きで実施されることが期待される。

1.1.2 節のプロパティ 1 と 2 を満たす数値割り当てϕは、経験的関係構造から数的関係構造への準同型写像[homomorphism]である。[2]

ここで同型ではなく準同型なのは、ふつうの状況ではϕは単射ではないから。

関係構造[relational structure]： ある集合と、その上の 1 つ以上の関係との組。

例えば、考慮の下にある、すべての棒およびその有限の連結の集合をAとしたとき、

1.1.2 節および 1.1.3 節の手続きでの経験的関係構造は$\langle A, \succ, \circ \rangle$と書く。

連結操作は$c = a \circ b$という 3 項関係と考える。

対する数的関係構造は$\langle \mathrm{Re}, >, + \rangle$である。

[2] 発註: ここで述べているのは、いわゆる strong homomorphism と呼ばれるものだと思われる。以後の各章の議論や証明にて、要求されるのが homomorphism なのか full homomorphism なのか strong homomorphism なのかに注意。

数値割り当てϕは、AをReへ、$\succ$を$>$へ、$\circ$を$+$へ対応させる準同型写像。

一般に、集合A上の経験的関係RとRe上の数的関係Sに関して、Aの要素$a,b,\ldots$にてRが成り立つ場合のみ、$\phi(a),\phi(b),\ldots$にてSが成り立つような、AからReへの関数ϕ。

もっと一般に、経験的関係構造$\langle A,R_1,\ldots,R_m\rangle$、数的関係構造$\langle \mathrm{Re},S_1,\ldots,S_m\rangle$に関して、$R_i$から$S_i$ ($i=1,\ldots,m$)へ関係を保持する実数値関数ϕ。

もっともっと一般に、n個の集合$A_1,\ldots,A_n$と、$A_1\times\cdots\times A_n$上の$m$個の関係$R_1,\ldots,R_m$について、$R_i$を$\mathrm{Re}^n$上の$S_i$へ移すような、$n$個の実数値関数$\phi_1,\ldots,\phi_n$ (ϕ_jはA_j上に定義される)から構成されるベクトル値写像ϕ。

表現定理[representation theorem]：

ある関係構造が公理を満たすならば、数的関係構造への準同型写像が構成可能である、ということを述べるもの。

実数への準同型写像は、心理学にてしばしば尺度と呼ばれる。

測定とは、関心のある経験的関係構造から有益な数的関係構造への準同型写像（尺度）の構成であるといえる。

1.2.3 Uniqueness Theorems

単位カウンティング[counting of units]による長さの測定(1.1.2 節)において、棒aに割り当てる数$\phi(a)$はどの棒eが単位に選ばれるか（$\phi(e)=1$となる棒eはどれか）で決まる。この選択は恣意。

しかし、比$\phi(a)/\phi(e)$は棒eの選択に関係なく一意に[uniquely]決まる。

ϕはeを単位とする関数、ϕ'はe'を単位とする関数とすると、

$$\phi(a)/\phi(e)=\phi'(a)/\phi'(e)$$

$\phi(e)=1$、$\phi'(e)=\alpha$と置くと、

$$\phi'(a)=\alpha\phi(a)$$

あるいは

$$\phi(e')=1/\alpha$$

これは、いわゆる相似変換[similarity transformation]

$$\phi \to \alpha\phi = \phi', \quad \alpha > 0$$

が尺度ϕにおいて<u>許容される変換</u>[permissible transformation]であることを意味する。

ある尺度の許容される変換が相似変換のみであるとき、比尺度[ratio scale]と呼ばれる。

名前は、尺度の値の比が一意に決まることから。

セルシウス度とファーレンハイト度との関係は$C = (5/9)(F - 32)$であり、このような日常的温度測定では恣意的な選択が 2 つ含まれている： 単位と零点。

この変換はいわゆるアフィン変換[affine transformation]：

$$\phi \to \alpha\phi + \beta, \quad \alpha > 0$$

ある尺度の許容される変換がアフィン変換のみであるとき、間隔尺度[interval scale]と呼ばれる。

名前は、間隔の比が不変である（一意に決まる）ことから。

$$\frac{\phi'(a) - \phi'(b)}{\phi'(c) - \phi'(d)} = \frac{[\alpha\phi(a) + \beta] - [\alpha\phi(b) + \beta]}{[\alpha\phi(c) + \beta] - [\alpha\phi(d) + \beta]} = \frac{\phi(a) - \phi(b)}{\phi(c) - \phi(d)}$$

べき変換[power transformation]

$$\phi \to \alpha\phi^{\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

が、ある尺度の許容される変換のとき、対数間隔尺度[log-interval scale]と呼ばれる。

名前は、対数変換によって間隔尺度になることから。

密度のように、通常は比尺度だと思われている物理量の多くは実は対数間隔尺度である。

◆10 章を参照

単調増加変換[monotonic increasing transformation]

$\phi \to f(\phi)$　ここで f は実変数から実数値への狭義の単調増加[strictly increasing]関数

が、ある尺度の許容される変換のとき、順序尺度[ordinal scale]と呼ばれる。

名前は、順序のみが保存されることから。

許容される変換による測定の分類は明確ではあるが、どんな変換が許容されるかがいつでもはっきり分かっているとは限らない。

長さの測定の場合、単位の選択が許容されることは明白。

しかし例えば、b に近似するのに必要な a の copy の数 n を数えて記録するのではなく、n^2 や e^n を記録してもよいのだろうか？（恣意だろうか？）

n^2 の記録は n の記録と関係していて、$\phi \to \phi^2$ は許容される？

されないなら、どうして？

（答えは p.12 の頭）

許容される変換は、測定手続きにおける恣意的な選択の観点からよりも、準同型写像の観点からのほうが明確になる。

ある変換$\phi \to \phi'$が許容される (P) ⇔

ϕとϕ'がどちらも$\langle A, R_1, \ldots, R_n \rangle$から<u>同じ</u>$\langle \mathrm{Re}, S_1, \ldots, S_n \rangle$への準同型写像である (H)

このうちの片方 (H)$\Rightarrow$(P) は自明ではなく、<u>一意性定理</u>[uniqueness theorem]で証明される。

まとめると、
測定の基礎を分析することは、次の 2 種の定理を成り立たせるのに充分な公理のセットを定式化することを伴うものである：

表現定理：ある特定の数的関係構造への準同型写像ϕの存在

一意性定理：同じ数的関係構造への準同型写像を生み出す許容される変換$\phi \to \phi'$

測定手続きとは、表現定理におけるϕを実際に構成する手続きのこと。

表現定理と一意性定理のペアは必ず、数的関係構造のチョイスと絡んでいる。
このチョイスはたんに<u>慣習</u>である。が、計算の簡便性に影響されている。

例）足し算＋は簡単だから（複雑でないから）採用される。

◆代わりとなる数的構造は 3.9 節、4.4.2 節、6.5.2 節、7.2 節、7.4.2 節、19 章にて。

1.2.4 Measurement Axioms as Empirical Laws

このように測定にはいろいろ慣習的な部分があるが、慣習の問題ではなく不変であるのは、経験的関係構造とその経験的プロパティで、そのいくつかは公理として定式化される。

表現定理と一意性定理を導く公理の集合は、質的（非数的）な経験的法則の集合と見なせる。
場合によっては（長さの例のように）法則は自明であるが、そうでない場合もあり、そのとき測定尺度の開発は質的法則の定式化と検証に深く結びついている。
筆者は、公理やそのクラスの経験的法則としての地位に着目したい。

◆1.3 節、1.4.5 節、1.5 節

1.2.5 Other Aspects of the Problem of Foundations

測定の基礎の分析において、主たる関心の 1 つは形式化[formalization]：

利用可能なデータからの抽象としての経験的関係構造の選択、適切な数的関係構造の選択、適切な公理の発見、準同型写像の構成、表現定理と一意性定理の証明。

しかし、基礎に関する問題はこれだけではない。
重要な問題の 1 つは、測定誤差。一貫しないデータと、そこからの抽象である経験的関係構造との関係について、難しい概念的問題がある。まだよく理解されていない。

◆15～17 章にて議論される

1.3 ILLUSTRATIONS OF MEASUREMENT STRUCTURES

実例を２つ。

1.3.1 Finite Weak Orders

定義 1 (弱順序[weak order])

A を集合とし、$\succsim$ を A 上の二項関係とする。関係構造 $\langle A, \succsim \rangle$ は、すべての $a, b, c \in A$ について次の 2 公理が成り立つとき、そのときに限り、弱順序[3]である：

1. $a \succsim b \vee b \succsim a$　(連結律[connectedness])[4]
2. $a \succsim b \wedge b \succsim c \Rightarrow a \succsim c$　(推移律)

反対称律[antisymmmetry]も成り立つ弱順序を、単純順序[simple order]（または全順序[total order]）と呼ぶ。

定理 1 (有限順序構造の表現と一意性)

A を空でない有限集合とする。$\langle A, \succsim \rangle$ が弱順序であるとき、すべての $a, b \in A$ について

$$a \succsim b \Leftrightarrow \phi(a) \geq \phi(b)$$

が成り立つような、実数値関数 ϕ が存在する。
さらに、始域と終域が Re である狭義の単調増加関数 f が存在してすべての $a \in A$ について

$$\phi'(a) = f[\phi(a)]$$

であるとき、そのときに限り、A を定義域とする実数値関数 ϕ' も ϕ と同じプロパティを有する。
すなわち、ϕ は順序尺度である。

---

[3] 発註: 本には「前順序[pre-order]とも呼ばれる」とあるが、ここでの weak order にあたるのは total preorder である．前順序は擬順序[quasi-order]とも呼ばれる

[4] 発註: ここではいわゆる完全律[totalness] と同義．また反射律[reflexivity]は連結律から導出できるので別個に公理に含まれていない

定義 2 (対称部分、非対称部分、商集合上の単純順序)

$\succsim$ を A 上の二項関係とするとき、新しい関係 $\sim$ と $\succ$ を次のように定義する：

$$a \sim b \Leftrightarrow a \succsim b \wedge b \succsim a$$
$$a \succ b \Leftrightarrow a \succsim b \wedge \neg(b \succsim a)$$

$\langle A, \succsim \rangle$ が弱順序であるとき、 $\sim$ は A 上の同値関係[equivalence relation]であり、 $\succ$ は推移律と非対称律[asymmetry]を満たすことが証明される（◆エクセサイズ 4）。集合

$$\mathbf{a} = \{b \in A \mid b \sim a\}$$

は a を代表元とする同値類[equivalence class]と呼ばれる。$b \in \mathbf{a}$ のとき、そのときに限り、$\mathbf{a} \cap \mathbf{b}$ は非空であり、このとき $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ である。つまり、個々の同値類は A のパーティションを形成する。 $\sim$ による同値類全体の集合[5]は $A/\sim$ と記す。

弱順序 $\succsim$ から $A/\sim$ 上の新しい順序関係 $\geqq$

$$\mathbf{a} \geqq \mathbf{b} \Leftrightarrow a \succsim b$$

が導かれる。 $\geqq$ は単純順序である。（◆エクセサイズ 4）

定義 2 と定理 1 から、同じ同値類の元は同じ尺度値を持たなければならず、逆もまた真であることが示される。

定理 1 は同値類の間の順序を保つ尺度であることを意味する。すなわち、

$$\mathbf{a} \geqq \mathbf{b} \Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}(\mathbf{a}) \geq \boldsymbol{\phi}(\mathbf{b})$$

を満たすような $\langle A/\sim, \geqq \rangle$ 上の実数値関数 $\boldsymbol{\phi}$ が構成され、A 上の ϕ は $\phi(a) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{a})$ で得られる。つまり、表現定理の条件は弱順序のケースから単純順序のケースへと還元される。

一意性定理についても、

$$\phi'(a) = f[\phi(a)] \Leftrightarrow \boldsymbol{\phi}'(\mathbf{a}) = f[\boldsymbol{\phi}(\mathbf{a})]$$

が成り立つので、単純順序へ還元される。

表現定理の証明は以下の通り簡単。

各 $\mathbf{a} \in A/\sim$ に対して、 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{a})$ に $\mathbf{a} \geqq \mathbf{b}$ が成り立つ同値類 $\mathbf{b}$ の個数を当てるものとする。

$\mathbf{a} \geqq \mathbf{b}$ のとき、推移律から $\forall \mathbf{c}(\mathbf{b} \geqq \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{a} \geqq \mathbf{c})$ であり、 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{b})$ にて $\mathbf{c}$ がカウントされるなら $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{a})$ にも必ず $\mathbf{c}$ がカウントされるので、 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{a}) \geq \boldsymbol{\phi}(\mathbf{b})$ が成り立つ。

逆に、 $\mathbf{a} \geqq \mathbf{b}$ が偽のとき、連結律から $\mathbf{b} \geqq \mathbf{a}$ であり、故に $b \succ a$ である。よって $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{b})$ にカウントされるが $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{a})$ にはカウントされない $\mathbf{c}$ が少なくとも 1 つ存在し、 $\boldsymbol{\phi}(\mathbf{b}) > \boldsymbol{\phi}(\mathbf{a})$ が成り立つ。証明終了。

一意性定理の証明も簡単なので省略。（◆エクセサイズ 7）

---

[5] 発註: 商集合[quotient set]と呼ばれる。

同値類を数えるというϕの構成手続きは、有限集合のときにしかうまくいかない。

◆可算集合に適用できる手続き(1.1.1 節、◆エクセサイズ 6)を用いた証明は定理 2.1

上の手続きでは、証明で言及されているように推移律と連結律が不可欠であり、社会科学への応用にあたっては、これらは経験的に検証されるものである。
経験的なケースでは、$a \succ b, b \succ c, c \succsim a$ となったり、$a \succ b$ も $b \succ a$ も $a \sim b$ も成立しなかったりすることはあり得るのだから、経験的見地からはこれらの法則はトリビアルではない。

1.3.2 Finite, Equally Spaced, Additive Conjoint Structures

前節の$\langle A, \succsim \rangle$では、$A$のどの元が他の 2 つの元の和であるのか特定できず、よって単位カウンティングは使えない。単位カウンティングが行えるためには構造にさらなる特徴が必要となる。

集合Aを直積集合$A = A_1 \times A_2$と考えよう。経験的には、2 つの要因で順序$\succsim$が決まるものと想定しよう。あるオブジェクトaは、A_1要因の水準a_1とA_2要因の水準a_2を持つ。これを$a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$等々と表記することにする。

例として、A_1要因を気温、A_2要因を湿度、関係$\succsim$を不快さとする。
ここで、不快さは各要因個別での（つまり片方の要因の値を固定した下で）順序を導くものとする。A_1上の$\succsim_1$およびA_2上の$\succsim_2$は次のように定義される：

$a_1 \succsim_1 b_1 \Leftrightarrow$ すべての$c_2 \in A_2$について$(a_1, c_2) \succsim (b_1, c_2)$

$a_2 \succsim_2 b_2 \Leftrightarrow$ すべての$c_1 \in A_1$について$(c_1, a_2) \succsim (c_1, b_2)$

経験的には$\succsim_1$や$\succsim_2$が弱順序でないこともあろうが、ここでは弱順序と仮定して話を進める。

この構造にて、連結されることができるのは<u>1 要因内の区間</u>である。
A_1の区間を$a_1 b_1$と表記し、a_1, b_1は区間の端点と呼ぶ。$a_1 \succsim_1 b_1$のとき、区間を$a_1 b_1$と書き、$b_1 a_1$とは書かないことにする。
区間$a_1 b_1$と$b_1 c_1$は隣接しているので、$a_1 c_1$を和と見なすことができる。

2 つの区間$a_1 b_1$と$c_1 d_1$は、両方とも同じ区間$a_2 b_2$とマッチするときに、等しいと見なせる。
$a_1 b_1$が$a_2 b_2$とマッチするとは、$(a_1, b_2) \sim (b_1, a_2)$を意味する。これは 2 要因の加法性[additivity]を仮定している。

等間隔を形成し、それを連結して要因 A_1 上の標準系列を作る方法（図 1)。2 番目の要因の存在と、加法性の仮定によって、1 番目の要因上に等間隔の単位と標準系列を作ることが可能となる。

定義 3 (独立コンジョイント構造[independent conjoint structure])

A_1 と A_2 を空でない集合とし、$\succsim$ を $A = A_1 \times A_2$ 上の二項関係とする。関係構造 $\langle A_1 \times A_2, \succsim \rangle$ は、すべての $a, b, c \in A$ および $a_i, b_i, c_i, d_i \in A_i$, $i = 1,2$ について次の 4 公理を満たすとき、そのときに限り、独立コンジョイント構造である：

1. $a \succsim b \vee b \succsim a$
2. $a \succsim b \wedge b \succsim c \Rightarrow a \succsim c$
3. $(a_1, c_2) \succsim (b_1, c_2) \Rightarrow (a_1, d_2) \succsim (b_1, d_2)$
4. $(c_1, a_2) \succsim (c_1, b_2) \Rightarrow (d_1, a_2) \succsim (d_1, b_2)$

独立コンジョイント構造は公理 1 と 2 から弱順序である。

定義 4 (独立コンジョイント構造の各コンポーネント上の関係)

$\langle A_1 \times A_2, \succsim \rangle$ を独立コンジョイント構造とする。A_1 上の $\succsim_1$ および A_2 上の $\succsim_2$ を次のように定義する：

$a_1 \succsim_1 b_1 \Leftrightarrow (a_1, c_2) \succsim (b_1, c_2)$ が成り立つような $c_2 \in A_2$ が存在する
$a_2 \succsim_2 b_2 \Leftrightarrow (c_1, a_2) \succsim (c_1, b_2)$ が成り立つような $c_1 \in A_1$ が存在する

公理 1〜4 から $\langle A_i, \succsim_i \rangle$ は弱順序である。（◆エクセサイズ 11）

「独立」という修飾は、 A_i 上の順序 $\succsim_i$ が A_j の水準に依存しないことを意味する。

定義 5 (等間隔加法コンジョイント構造[equally spaced, additive conjoint structure])

A_i 上の二項関係 J_i ($i = 1,2$)を次のように定義する：

$a_i J_i b_i \Leftrightarrow$ すべての $c_i \in A_i$ について $c_i \succsim a_i$ または $b_i \succsim c_i$ の片方だけが成り立つ

構造 $\langle A_1 \times A_2, \succsim \rangle$ が公理 1〜4 に加えて、すべての $a_i, b_i \in A_i$, $i = 1,2$ について次の公理を満たすならば、等間隔加法コンジョイント構造である：

5. $a_1 J_1 b_1 \wedge b_2 J_2 a_2 \Rightarrow (a_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$

関係 J_i は、$\succsim_i$ の意味で、a_i が b_i より大きく（等しくもなく）、a_i と b_i の間に入る水準が無いことを意味する。
「等間隔」という修飾は、直観的に、A_1 と A_2 で互いに調整することでどの 2 つの J 区間も等しくされている、ということを意味する。

定理 2 (有限等間隔加法コンジョイント構造の表現と一意性)

A_1 と A_2 を空でない有限集合とする。$\langle A_1 \times A_2, \succsim \rangle$ が等間隔加法コンジョイント構造であるとき、すべての $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in A_1 \times A_2$ について

$$a \succsim b \Leftrightarrow \phi_1(a_1) + \phi_2(a_2) \geq \phi_1(b_1) + \phi_2(b_2)$$

が成り立つような、A_i 上の実数値関数 $\phi_i, i = 1,2$ が存在する。

さらに、各 $A_i / \sim_i$ が少なくとも 2 つの同値類を含むとき、もし ϕ_1', ϕ_2' が ϕ_1, ϕ_2 と同じプロパティを有する実数値関数ペアならば、

$$\phi_i' = \alpha \phi_i + \beta_i, \quad i = 1,2$$

を満たすような定数 $\alpha > 0, \beta_1, \beta_2$ が存在する。
（◆証明はエクセサイズ 12〜14）

この表現定理が述べているのは、2 成分のベクトル準同型写像 (ϕ_1, ϕ_2) であり、$\langle A_1 \times A_2, \succsim \rangle$ から $\langle \mathrm{Re} \times \mathrm{Re}, \succsim' \rangle$ へ写像する。$\succsim'$ は $(x, y) \succsim' (u, v) \Leftrightarrow x + y \geq u + v$ と定義される。

一意性定理が述べているのは、ϕ_i は共通の単位（定数 α ）と個々独立の零点（定数 β_1, β_2 ）をもつ間隔尺度であるということ。

公理 1 と 2 の経験的地位に関して、このようにオブジェクトを 2 側面でもって測るときには推移律が満たされないことが経験的にはしばしばあることに注意。

公理 3 と 4 を独立則[independence laws]と呼ぶ。
直観的には、ここでの独立性は、2 変数の交互作用が無いことの順序版（質的版）。もちろん、定理 2 の結論である加法性は、より強い、量的な交互作用無しを主張している。

独立則は、加法コンジョイント測定[additive conjoint measurement]、多項コンジョイント測定[polynomial conjoint measurement]（◆6 章、7 章）、効用測定[utility measurement]（◆8 章）、多次元近接測定[multidimensional proximity measurement] （◆13 章）において突出した役割を果たす。

公理 5 については、たまたま満たされているなどということはまずない。
実践的には、要因の水準のサブセットをとるなどして、このプロパティを満たすようにする。
高いところにある水準 a_1 と a_2 から始め、A_1 での 1 つ低い水準 b_1 を選んだとき、その次に A_2 の水準 b_2 を選ぶにあたっては $(a_1, b_2) \sim (b_1, a_2)$ を満たすように制約される。A_1 の次の水準 c_1 に関しては $(c_1, a_2) \sim (b_1, b_2)$ を満たすよう制約され、同様に c_2 に関しては $(b_1, b_2) \sim (a_1, c_2)$ を満たすよう制約される。しかしここで自由度がなくなってしまい、$(b_1, c_2) \sim (c_1, b_2)$ も満たされていなければならない。でも経験的にはそうなっているとは限らない。
よって、たとえ公理 1〜4 が満たされていても、公理 5 を満たすのは一般的に可能とは言えない。最低限、次の法則が成り立っていなければならない：

5´. $(a_1, b_2) \sim (b_1, a_2) \wedge (c_1, a_2) \sim (b_1, b_2) \sim (a_1, c_2) \Rightarrow (c_1, b_2) \sim (b_1, c_2)$

選択のプロセスを続けると、公理 5 を満たすためのこういう法則がどんどん出てくる。

◆この問題の対策は 6 章

1.4 CHOOSING AN AXIOM SYSTEM

公理系のよく知られた論理的特徴と、測定系に見られる公理のタイプをテクニカルでない言葉で解説する。

◆形式的な扱いは 18 章

1.4.1 Necessary Axioms

表現[representation]には少なくとも 1 つの公理が必要となる。

$\succsim$ を A 上の任意の二項関係としたとき、$\langle A, \succsim \rangle$ から $\langle \mathrm{Re}, \geq \rangle$ への準同型写像が必ずしも存在するわけではない。実際、もし準同型写像 ϕ が存在すると仮定するなら、$\succsim$ は推移的ということになり、$\succsim$ は任意ではなくなる。
このことをもって、推移律は（準同型写像が存在するという命題に対する必要/充分を考えたときの）必要公理[necessary axiom]である。
反射律も同様の意味で必要[necessary]であるが、他の公理から出てくるため、これを定理 1 の証明のための公理とする必要はない。連結律は証明に要する必要公理である。

加法コンジョイント構造（定理 2）の表現に関しては、公理 1〜4 はすべて必要である。
対して、公理 5 は必要ではない。

この本に登場する各公理系は、数個のかなり単純な必要公理からなっている。
通常はこれらの公理を最初に提示し、その直観的意味や経験的法則としての役割などを論じる。ほぼすべてにおいて、それが必要公理であることの証明は単純なので、一度に提示されたり省略されたりする。
正しい必要公理の集合を選び出すための規則はない。洞察や試行錯誤である。

筆者は、公理の数を最小に留めるような努力はしない。
公理の個数というのはミスリーディングなもので、極端な事を言えば、連言によって 1 つの公理にすることが常に可能である。もっと現実的なケースを考えたとしても、単純に見える公理であっても複雑なプロパティを隠し持っていることがよくある。
筆者は、公理が概念的に別々であることを示すように公理を述べるよう努める。たとえ数が増えても。

1.4.2 Nonnecessary Axioms

非必要公理[nonnecessary axioms]はしばしば構造[structural]公理と呼ばれる。公理系を満たす構造の集合を、表現定理によって定まる集合よりも小さく限定するため。

構造公理には大きく 3 つのタイプがある。

第 1 に、系がトリビアルでないことを求めるもの。ある集合が空集合でないだとか、少なくとも 2 つの同値でない要素があるだとか。
これで排除される構造は経験的な関心がないものであり、理論の適用可能性を実際的に狭めるものではない。

第 2 に、ある集合が有限[finite]であるとか可算[countable]であるとか述べるもの。
定理 1 も定理 2 もこの種の限定が入っている。どちらの場合も筆者はこれを別個の公理としてリストせず、表現定理、一意性定理の前提として入れている。これは単にスタイル。完全に形式化された理論ではすべての仮定は公理としてリストされるが、こういうスタイルはこの本のあちこちで用いられる。
有限性は真に限定である。ただ、定理 1 についても 2 についても、有限性を置き換えた代替的な定理を提示する（◆1.4.3 節）。

第 3 に、ある類の等式や不等式に解が存在すると述べるもの。可解性[solvability]公理と呼ばれる。
例えば長さ測定において、2 つの可解性公理が用いられる。1 つは、棒の集合 A が「稠密」であり、$a \succ b$ となるときはいつでも、$a \succsim b \circ c$ となったり（不等式の解）あるいは $a \sim b \circ c$ となる（等式の解） A の元 c が存在する、というもの。長さの外延的測定の表現定理、一意性定理が妥当だとしても、これが満たされないような棒の集合は簡単に思いつく。
もう 1 つは、少なくとも特定のペア $a, b \in A$ に関して連結 $a \circ b$ が存在する、というもの。この種の公理は隠れていることが時々ある。例えば二項演算をプリミティブとして、定義にて $a \circ b$ がすべての a, b について存在する、とするなど。そうとしても、形式化にてすべての存在的仮定を明示すれば次のようになるだろう：

　プリミティブな三項関係 $a \circ b = c$ があり、すべての $a, b \in A$ について、$a \circ b = c$ が成り立つたった 1 つの $c \in A$ が存在する。

$a \circ b$ がすべての a, b について定義されておらず、可解性の隠れ具合が薄い場合もある。

等間隔加法コンジョイント構造の公理 5 は、これら 3 種のどれにも入らないが、結果として可解性タイプである。

もし公理 5 が成り立っている構造 $\langle A_1 \times A_2, \succsim \rangle$ を構成しようとするなら、1.3.2 節で示されたように a_1, a_2, b_1 を選んだのち $(a_1, b_2) \sim (b_1, a_2)$ となる b_2 を選ぶ。この作業は $(a_1, b_2) \sim (b_1, a_2)$ が b_2 について可解であるという仮定を要する。

　◆6 章では公理 5´のような必要公理で公理 5 を置き換える

筆者は、できるかぎり制限的にならないように構造公理を選ぶよう努める。
場合によっては代替的な公理系を示す。別のクラスの構造をカバーする、特に、表現が証明可能な構造のクラスが大きくなる（すなわち構造公理が弱くなる）ように。ただこれは、より強い構造公理の下では公理系から演繹可能であった必要条件を明示的に追加導入するという対価とのトレードオフ。この交換は、適用可能性のゲインがあり、追加される必要条件が多すぎたり複雑すぎたりしない場合には望ましいだろう。

多くの箇所では（特に 3,4,5,6,13 章、加法的な表現を扱っている）、残された制限が実際的意味を持たない程度に（＝応用場面の多くでは経験的に受け入れられやすいだろうように）構造的プロパティを限定した。
その他の箇所では（特に 7 章のような非線形構造が関係する箇所）、構造的制限は満足のいくものではなく、これを弱める仕事がもっと必要だ。
しかしたとえ強い構造公理が要求されたとしても、表現に対して論理的に充分である公理

集合を得ることが重要である。必要公理だけでは、表現の検証をどのように実行すればよいか不明なままになる。

1.4.3 Necessary and Sufficient Axiom Systems

公理系は、表現定理と一意性定理を証明するのに必要なだけでなく、充分であるとわかるのが望ましい。つまり、表現に関して必要充分[necessary and sufficient]な公理系。

必要充分で satisfactory な公理系の事例はほとんどない。なぜか？大まかに言えば、特定の数的構造への準同型写像を認める構造の集合全体は非常に異種混交であり、規則的なものだけでなく普通でない（病的なとでも言うべきか）事例も含みうるから。よってその条件は役立てるには複雑すぎるだろう。

◆体系的には、9 章「測定不等式」、18 章「公理化可能性」

公理化が「satisfactory」であれという要請は重要である。なぜなら、必要充分で unsatisfactory な公理化は常に存在するから：表現定理と一意性定理それ自体を公理としてしまえ。
では、公理化が satisfactory である基準とは？
1 つは、経験的操作として直接的で容易に理解される意味を公理が持つこと。その単純性により、直観的に考えて明らかに経験的に真であるか、体系的に検証する方法が明らかであるような。
単純性と意味の明瞭性というのは見る人次第のところがあるが、この本を読み終える頃には、今は愕然とするような公理であってもクリアになっているものがあることだろう。公理化は、単純性の探求の面もあるが、公理化する人の認知過程を再編成して物事が単純に見えるようにする、という面もある。

1.4.4 Archimedean Axioms

上の 3 タイプの他に、とあるかなり奇妙な公理が系の一部として述べられる： アルキメデス性[Archimedean]公理と呼ばれている。実数のアルキメデス性に対応するもの。
実数のアルキメデス性：

任意の正の数 x についてそれがいかに小さくとも、かつ、任意の数 y についてそれがいかに大きくとも、$nx \geq y$ となるような整数 n が存在する。

つまり、どんな 2 つの正の数でも比較可能である、すなわち、比が無限ではない。

言い換えれば、 $y > nx$ となるような整数 n の集合は有限集合である。

例えば、外延的測定にて、 $a, a \circ a = 2a, 3a, \ldots$ を標準系列とする。アルキメデス性公理が述べるのは、いかなる b についても、 $b \succ na$ となる整数 n の集合は有限集合である。

一般に、標準系列（つまりゼロでない等間隔のエンティティ列）を定義しようとするときは常に、アルキメデス性を次のように定式化できる： すべての狭義有界な[strictly bounded]標準系列は有限である。

アルキメデス性は実数において真であるから、経験的関係系でも真でなければならないのは明らか。つまり必要公理。
驚くべきは、これが必要とされる[needed]公理であること。公理の独立性が研究された例においては（少ないが）、アルキメデス性公理が他の公理と独立であることがわかっている。そして満足のいく置き換えを提案した者はいない。
かなり強い構造的仮定の下では（6.11.1 節参照）この公理は削除されうるが、筆者が目指すところのかなり弱い構造的仮定の下では、もっと望ましい必要公理へ置き換える方法はわかっていない。

これを必要公理とすることへの反論は、有限構造においてはトリビアルに真である（だから定理 1 や 2 では述べられていない）、あるいは、それに反する経験的証拠がどのようなものであるか不明確である、というもの。

$\langle A_1 \times A_2, \succsim \rangle$ を弱順序と仮定し、1 番目の要因におけるどんな差異でも decisive である、すなわち、2 番目の要因は 1 番目においてタイである場合にのみ関与する、とする。この場合、A_1 上の区間は A_2 上の区間に比べて無限に大きい。もし充分に大きな A_2 上の差異が A_1 上の小さな差異と釣り合うならば、加法コンジョイント構造に関してアルキメデス性公理は適当に思われる。検証が難しいのは、 $A_1 \times A_2$ 上の弱順序が非アルキメデス性を有していると結論するのに充分な証拠とはどんなものか、という点。

◆1.5 節、17 章、18 章

1.4.5 Consistency, Completeness, and Independence

この本で提示されるすべての公理系は、非同型な実数でのモデルをいくつか持っている。よって、系は無矛盾で[consistent]（＝公理を満たすものがある)、範疇的でない[not categorical]（＝2 つ以上の本質的に異なるものが公理を満たす)。

独立性については難しいのではっきりしたことは言えない。他の公理から導出できる公理をわかっていながら含めるなどということはしていないが、不注意で含んでしまっているかもしれない。数箇所（◆3 章、6 章）では独立性を形式的に証明できている。

提示される各公理系は、論理的形式においても、それのモデルのタイプにおいても、多様

である。

1.5 EMPIRICAL TESTING OF A THEORY OF MEASUREMENT

測定の系は、たとえ公理的であっても、数学的根拠以上に、経験的根拠にて評価されなければならない。しかし経験的評価は難しい。

1.5.1 Error of Measurement

ここで問題とする「エラー」は、人為的なミスのようなものではなく、観察したいものを正確に観察することを妨げるような観察状況に内在する特徴のこと。

例として、天秤で重さを判断する状況を考えよう。
2 つの皿に物をのせ、水平から傾かなかったとき、同じ重さと思っていいだろうか？

ナイフエッジ（支点）と腕の接触部分には多少なりとも摩擦があり、そのせいで天秤はのせた物のペアに完璧に敏感ではない。さらに、接触点の状態は、運動と電気化学的効果によって変動し、摩擦の量は観察のたびに不規則に上下する。よって、敏感性のぎりぎりのところの重さの違いがあった場合、反復観察にて同じ結果とならないかもしれない。

このような境界でのランダムエラーの他にも、体系的なエラーもある。
例えば、たくさんの物を先頭から 2 組ずつ順番に比べていってその都度同じ重さだと判断されても、最初の物と最後の物を比べたら同じ重さと判断されない、ということもありえる。つまりその場合、観察された関係は弱順序ではなく、定理 1 のような仕方で表現できない。
もっと敏感な天秤を用いれば、同じと判断されていたペアが同じではなくなって、弱順序を満たすようになる、ということもありえる。しかしこの新しい天秤においてもはかる物の集まりを替えると同じ現象が起こりえる。
このように、近似度は改善されるので、弱順序の仮定をそのままにしておきたくなるし、観察する物の集合によっては体系的エラーもあるよ、とお茶をにごす。

1.1.2 節や 1.3.2 節のように、測定尺度の構成は、標準系列の単位カウンティング手続きを含んでいることが多い。しかし、どんな標準系列の定義でも、オブジェクトやインターバルの正確なレプリカを要する。エラーが存在する場合に、我々の取れる選択肢は 2 つ。
１つは（こちらがよく採用されるのだが)、比較を行うときに用いる方法よりももっと高級で精密な方法でもってレプリカを作ること。

もう 1 つは、正確な標準系列を用意するのをやめて、クリアカットな大小判断だけを使って近似的な標準系列を作ること。（◆4.4.4 節に例）つまり、いくらかの不等式を観察だけでなく推論で導く。例えば、a が明らかに c より大きく、b は c と違わないように見えるなら、a は b より大きいと考える。このような推論で弱順序を生み出すためには、クリアカットな観察が半順序[semiorder]の公理（◆15 章）を満たしていなければならない。

観察、理論、さらに洗練された観察、というのは微妙な関係にある。
理論はテストされるものでもあるが、エラーの存在や性質を規範的に定義するのにも用いられる。理論と観察の食い違いを、理論の不適切さではなくエラーに帰属すべきなのはどんな場合かという正確な条件を定式化することは今のところできない。
測定理論に加えて明示的なエラー理論が開発されれば楽になるが、今日のところエラー理論はほとんど存在しない。
　◆これに関してわかっていることは 15～17 章

1.5.2 Selection of Objects in Tests of Axioms

経験的テストに関するもう 1 つの問題は、ほとんどの理論が大きい（しばしば無限の）集合について述べるものであるということ。対して、経験的テストは小さな有限集合を扱う。帰納の問題は科学理論の検証一般に関わることだが、測定の公理系に関してはさらに特別な問題がいくつかある。

第 1 に、いくつかの公理は、他の公理よりも反証が容易である。
例えば、推移律はたった 1 つ非推移的な組を見つければ反証されうる。一方、アルキメデス性は単に $b \succ a, b \succ 2a, \ldots, b \succ ma$ では反証できない。何か $na \succsim b$ となる $n > m$ が存在するかもしれないから。大きい n が調べれば見つかるというのはありそうにないと考えて、アルキメデス性公理をリジェクトすることは、場合によってはあるかもしれない。あるいは、$\succsim$ の経験的解釈を通常とは違えるというのもありえる。例えば、$\succsim$ の成立のルールを直接観察可能なものに限定して、アルキメデス性公理のリジェクトを可能にするなど。
公理の反証可能性は、数学的形式だけでなく経験的解釈にも依存することを心に留めておくように。
非必要公理はふつうテストされない。例えば、集合の要素がある程度のきめ細かさを持っていると考えられるなら、不等式の解の存在を強く信じるだろう。また、我々は頻繁に（理想化として）、オブジェクトのドメインの「連続性」[continuity]（数学的には、順序位相の連結性[connectedness in the order topology]）を認める。この理想化の帰結として、式の可解性が認められる。しかしこの点に疑いがあるなら、可解性公理はアルキメデス性と同様の困難さをもたらす：単にまだ解が見つかっていないからといって、絶対に見つからないとは限らな

い。

第 2 に、いくつかの公理は、他の公理よりも確証が難しい。
公理の反証に失敗したときに、検定での検出力の話に似た問いが出てくる：もし公理が本当は間違いだとしたら、自分たちは公理が間違っていることをデータが示せるようにオブジェクトを選んだのか？
例えば、推移律のテストはオブジェクト a,b,c の選び方によっていて、明らかな a,b,c よりも、わずかに異なる a,b,c にて推移律を確認できた場合のほうがより確信できるかもしれないが、そのようなことをすると、エラーのせいで、推移律を誤ってリジェクトする危険が高まる。
また、系の必要公理がどれ一つデータによって反証されず、構造公理はアプリオリに仮定されたものだとしても、表現の証明に必要でない帰結が同じデータによって反証されるかもしれない。

これらの指摘が意図することは、公理の集合のアクセプトの前に、オブジェクトの選出の完璧さが求められるということ。もう 1 つは、公理系について、系の帰結についてデータの許すかぎり多くをテストするようにして、可能なすべての間接的テストを実施するべきであるということ。
究極的な帰結は表現定理そのものであるのだが、どうして手元のサンプルについて表現が構成可能かどうかテストしないのだろう？
理由の 1 つは、データの可謬性。実行されるテストが多いほど、そのうちの 1 つがサンプリングエラーのせいで失敗する可能性が高まる。これに対しては、反証の基準を緩める必要があるが、そうすると実際にシステマティックに誤っている場合に公理系をリジェクトすることに失敗する可能性が大きくなる。また、数的表現の存在は、固定のサンプルに関しては、大きな同時不等式のセットに解が存在することと対応する（◆1.1.3 節、9 章）。しかし、実践的には、不等式のセットが解を持つことは稀。だが、不等式のほとんどを解く、というふうに「解」の基準を緩めると、公理のシステマティックな誤りがある場合にも「解」が存在することになる。
もう 1 つの理由は、あるサンプルについて表現を構成しようとしてすべての帰結をテストしても、その失敗が有益でないことが多いから。

satisfactory な公理化の 1 つの価値は、比較的単純で、概念的に別々で、経験的にテスト可能な条件のセットをテストされるものとして提示することにある。
エラーの問題もテストするオブジェクトの選出の問題も、簡単な話ではないが、実験的、統計的な道具を使えるものはすべて使って取り組まなければならない。

1.6 ROLES OF THEORIES OF MEASUREMENT IN THE SCIENCES

測定はすべての科学に不可欠な役割を担うので、測定理論に多大な関心のある人もいるだろう。しかし、現代物理学の多くでは、そうではないようだ。
応用物理学（力学、熱力学、流体力学など）では、次元解析が物理的測度のプロパティに依存するので、関心のある人もいくらかいる。量子理論や相対論の基礎の深い問いに関心がある人もそうかもしれない。
しかし、大部分の人は、物理的測定についての問いは物理学の哲学の分野で、物理学そのものではないと思っている。ふつう、物理学において関心のある変数の測定可能性は当然のことで、実際の測定は、物理理論によって、いくぶん間接的な観察へ還元されている。だから、測定装置の開発と修正が彼らの活動の 1 つではあっても、この本で述べているようなこととはほど遠い。

他の科学、特に人間に関係するようなものは、測定についてかなり確信が低い。行動科学や社会科学では、変数が測定可能であるかどうか、可能であると思うものに理論が本当に合っているかどうか、確かではない。しかも、物理学のように、測定のスキームを開発できるような確立した理論がない。よって、測定についての分析や新しい系の構成は、行動科学者の大きな関心事であり続けてきた。

関心のある属性を測定する必要があるときに、よくあるのは、基礎的測定が課す難しい理論的、経験的問題を避けて、その属性と強く相関すると信じられている容易に測定される物理量で代替すること。空腹感の代わりに食べ物なしの時間、不安の代わりに皮膚電気抵抗、嫌悪の代わりに電流のミリアンペアなど。
深い分析がないときにこれを行うのはもっともなことで、基本的な属性がよく理解された日にはそれらの代替がうまく働くことが判明するだろうが、今の時点でそれを未分析の概念の客観的定義としてしまうのは、間違った操作主義である。

2 つのオブジェクトやイベントのどちらが大であると言うための手段が開発されるまでは、その属性の丹念な分析についてできることはほとんど無いように思う。いったん順序づけが可能になれば、順序に影響する複数の要因に着目したりして、さらなる構造を調べようとする。こうして質的法則の探求が始まる。
物理的測定では典型的には 1 次元（◆ただし 10 章参照）なのに対して、行動科学の測定理論の多くは内在的に多次元で、いくつかの測度とそれらを結ぶ法則を同時に扱う。
これらの理論はテストされるべき質的法則を提案し、間違っているとわかった際には、システマティックなズレから多くを学ぶ。さらに理論は、注意を単純な質的法則に登場する変数に絞ることで、多くの潜在的関係要因からの選出を実現する。

基礎的測定表現の研究は、行動科学では比較的最近のもので、古い研究分野（計量心理学や尺度理論）とは対照的である。計量心理学研究のほとんどは、質的関係よりも数的関係にもとづいている（例えば、相関係数行列、テストプロファイル、選択確率など）。ただし順序関係に着目するという伝統はある。それは、数的関係（多くは幾何学的性質）でもって順序を表現することを目指したもので、入力データをコンパクトで明確にする。一次元の方法ではサーストンスケーリングやテスト理論、多次元の方法では因子分析の双線形モデルや Coombs(1964), Guttman(1944, 1968), Shepard(1966)の順序的手続きなど。これらのスケーリング手続きのほとんどは、モデルの妥当性を仮定し、データへの数的表現のベストフィッティングを作るもので、仮定したモデルが本当に適切かどうかは関係ない。
それに対して、この本では、ある表現が可能となる質的条件に関心を置く。
測定理論はスケーリング手法の補足物と思われるかもしれない。前者は数的表現を適切たらしめる経験的法則（公理）に関心があり、後者はその種の数的表現を発見する方法に関心があるから。しかしこれは錯覚的で、スケーリング研究の大部分はある数的構造から別の数的構造への写像に関するもので、質的構造から数的構造へのものではない。例えば、適正、知能、社会的態度、テスト得点、数値評定などはふつう関心のある属性の測度として解釈される。しかし、経験的関係構造から数的関係構造へのきちんと定義された準同型写像がなければ、その数をどう解釈していいのかはっきりしない。（◆20 章）
明らかな相補関係は、順序スケーリング手法との間にある（これは遅れてスケーリング研究の主たる関心となった。原因の一端はコンピュータの速度。実際、上に挙げたような多次元順序スケーリングの研究が初期にあったのに）。特定のスケーリング法が正当化されるかどうかのテストの方法を示すことにおいて、公理化は重要な役割を担っている。そして、公理からのシステマティックなズレを探求する誘因となる。

1.7 PLAN OF THE BOOK

多くの異なる経験的関係構造や公理系が測定を可能とし、数を得る手続きは 3 つの基本的手続きのどれかに還元されるという、1.1 節や 1.2 節で述べたテーマを発展させデモンストレーションを行うことにこの本の多くが割かれている。

2 章は数学的な章で、適切な仮定の下で、1.1 節に概説された手続きが矛盾のない数的な解決を与えるものであるという、一連の厳密な同型写像定理を証明する。3〜9 章で登場する表現定理と一意性定理は 2 章での定理の応用に還元される。証明をスキップするつもりなら、2 章を詳しく読む必要はない。しかし、その場合は 1.1 節を注意深く読んで数的尺度の構成の仕方を直観的に理解しておくこと。そして、後の章を読むときには、1.1 節の方法がどのように適用されているかを理解するよう努めるべき。それには、2 章の定理で述べられ

ていることをざっと見ておくのがよいかも。

3〜8 章はすべて 1.1.2 節の単位カウンティング手続きにもとづいており、これは厳密には 2.2 節で定式化されている。3 章では、経験的関係構造が連結操作を含んでいるので、単位カウンティングが直接に登場する、外延的測定。確率の章である 5 章の前半も、排他なイベントの和集合が連結の役割を果たすので、外延的測定の一種と考えられる。5 章の後半、6 章、8 章は、1.3.2 節で述べた、等間隔で並んだ単位を数え、等間隔はもう一つの要因の間隔とのバランスで定義される、という手法を用いる。4 章は、差の測定に関する章で、カウンティング手法を純粋に用いる。それより後の章に出てくるものの多くはこの 4 章の手法に還元される。6 章は加法コンジョイント測定、8 章は 6 章の結果を期待効用測定に応用する。7 章では、単位カウンティングが加法-乗法（多項）コンジョイント測定で用いられる。
3〜8 章でのトピックのいくつかが､単位カウンティングの代わりに不等式を解く方法(1.1.3 節、2.3 節)を用いる 9 章でも再登場する。
1 巻の最後の章は、基礎的測定と次元解析の接続を試みる。基礎的に測定された変数が満たす数的法則と質的に同等な物を定式化する。

1 巻は比較的、全体がまとまっているが、2 巻はもっと多様である。
最初の 4 章は幾何学的表現を扱う。11 章と 12 章では、幾何学的構造の一般的議論を行い、幾何学の古典的基礎づけを概観する。13 章では、プリミティブな概念として距離の順序にもとづいて幾何学の基礎づけへの新しいアプローチを提示する。ここでの表現定理は、3、4、6 章の外延的測定、差の測定、加法コンジョイント測定に依拠する。14 章は、物理科学以外で最もよく開発された測定系の 1 つである、色測定を扱う。ここでも表現は幾何学的であるが、この本の他の測定とは異色である。
その次の 3 章は、測定エラーの問題を扱う。15 章と 16 章は、エラーが直接に組み込まれ公理的に扱われる経験的関係構造について。17 章は、前のほうの章に登場した測定理論をテストするための統計的手法について。この章ではエラーは外部的現象として扱われる。
次に、哲学的問題の章が 2 つ。18 章では、公理化可能性についての論理的問題。19 章では、一意性定理と、数的測定に関する言明の有意味性との関係。
最後に、20 章では、この本での測定へのアプローチを総括し他のアプローチと比較する。

EXERCISES

(ry