2010-06-08 & 2010-08-07 担当:中西

Foundations of Measurement: Chapter 4

Difference Measurement

4.1 INTRODUCTION

順序の測定は単調増加変換を除いて一意（◆2.1 節）。結合操作(concatenation)の表現を要する場合はもっとタイトな表現となった（◆2.2 節、3 章）。
次に浮かぶ問いは、「同じくらいタイトな表現は結合操作がない時にも存在するか」

外延的測定のキーアイデアは、等間隔な標準系列の存在だった。
しかし、標準系列がプリミティブで経験的な結合操作によって作られなければならないという決まりはないのだから、標準系列を作る他の方法を考えることができる。

プリミティブな順序を、要素についての、ではなく、要素の間の「間隔」についての、と考えてみる。すると、順序における違いの無さから等間隔を確立できるのでは。

A が動かせる棒の集合なら、比べたりくっつけたりして、外延的測定ができる。ならば、A は直線上の動かせない点の集合と考えた場合はどうだろう。
A 上の区間を測定したいなら、補助的な動かせる棒の集合をもってきて、区間にあわせて置いてみる必要がある。
もしこの補助的な棒が前もって外延的測定がなされているなら、話は何の進展もない。メートル棒で部屋を測るようなものだ。
しかし、補助的な棒は順序づけられているだけで、外延的測定はされていないとしたらどうか。つまり、いろんな長さの、目盛りのない定規をもっている。これで区間を測ってみようというのが次の進展だ。
例えば、ある人が、自分の歩幅を知らないけれども、同じペースで歩くことで、ある距離が別の距離の何倍か、という近似的な比を知ることはできる。

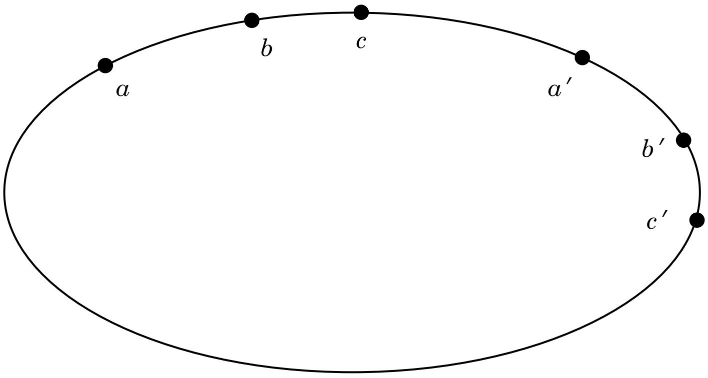
以降この章では、 A の要素 a,b,c,d について、その区間を ab,cd などと表す。 ab は ba と区別される。例えば、$ab \succsim cd$ は、動かせる棒の集合と比較して、ab を超えないけれども cd は超えるかまたは一致する棒がある、ということ。

4.1.1 Direct Comparison of Intervals

メートル棒とかあるなら、どうして区間の順序にもとづいた基礎的測定を考えなきゃなら

んのですか？

理由１．区間の順序がある性質（公理）を満たさないならば、外延的なものさしを使って測定しても整合的な結果は得られない。そしてその公理というのは、区間の順序にもとづく測定を公理化してみることで明らかになるのだよ。



※ イメージ図.
精確ではありません

$ab \sim a'b'$ かつ $bc \sim b'c'$ ならば $ac \sim a'c'$（「まっすぐさ」、あるいは曲率の一定性）の違反

理由２．外延的測定をしておくことのできない道具を使っても区間を順序づけることができるのよ。

例. 電球の明るさで電気抵抗を順序づける
例. 条件付き確率を区間として、その大小関係から、条件なし確率の尺度を構成（◆5 章）
例. 精神物理学でのバイセクション法
例. 精神物理学でのクロスモダリティマッチング
例. 精神物理学でのマグニチュード推定法
例. 精神物理学での区間のサイズ指標として両端点の弁別確率
例. 精神物理学での区間のサイズ指標として両端点の弁別の反応時間
例. 経済学等での効用の区間のサイズ指標として選択肢の選択確率

社会科学では
例. 社会的接触頻度による個人ペアの順序づけ
例. 社会調査での政策の類似性評価にもとづく国ペアの順序づけ
などが行われるが、ペアの順序がこの章のような方法で分析されるのは稀である。というのも、個々の対象（個人、国、etc）を１つの連続体上に表現できるかどうかが極めて怪しいから。むしろ、多次元空間の点としてや、距離が入った他の数学的構造にて表現することに関心が集まっている。（多次元表現は◆11-13 章）これらは 1 次元での表現とは明らかに区別され、それはこの章と 11-13 章の公理の違いに表れている。

もう１つ、社会科学で頻繁に用いられるのが、評定尺度(rating scale)
例えば、ジェット機の騒音に対して+2（少々心地よい）〜0（どちらとも）〜-10（これ以上なく苦痛だ）で評定させるとする。
評定尺度の反応は単に順序づけだとよく言われるのだが、この尺度の定義にはそれ以上の構造が暗に含まれている： ほとんどの人は、これを+5（少々心地よい）〜0（どちらとも）〜-5（これ以上なく苦痛だ）で評定するのは何かおかしいと思うだろう。(少々心地よい，どちらとも)の区間は、(どちらとも，これ以上なく苦痛だ)の区間よりもだいぶ小さいように思える。
よくある形式として、一連の項目に対して+10（非常に快）〜-10（非常に不快）で評定させて、その項目の１つがジェット機の騒音だったとする。ある参加者は+1 をつけ、別の参加者が-5 をつけたとき、我々は、後者の不快具合は前者の快具合よりも大きいと考えることに問題ないと思うだろう。
しかし、この解釈には経験的にも概念的にもいろんな困難がある：ある参加者は極端な評定をする傾向があったら？肯定的な評定をする傾向があったら？あるいは否定的な評定傾向？あるいは数に好みがあったら？
でも、適切に設計された評定尺度から区間の順序を得ることは可能かもしれない。

4.1.2 Indirect Comparison of Intervals

1 章にて、直積 $A_1 \times A_2$ の順序から各因子上の区間の順序づけを導いた。＊
そこでは、A_1 上の区間は、動かせる棒と比較されるのではなく、A_2 上の固定された区間と比較される。そしてこの比較は、直接に行われるのではなく、$A_1 \times A_2$ 上の順序から推論される。

例として、$a_1, b_1, \cdots$ を品物（あるいはお金）とし、$a_2, b_2, \cdots$ を別の品物とする。この品物ベクトル (a_1, a_2) 等の効用順序から、各品物における効用区間の順序が導かれる。
もしある人が、新しい靴に$20 を払うけれども、その後新しい靴をもう１つと言われたら$20 払いたくない、とする（たとえ最初に払った$20 は戻してあげます、というときでも）。
この状況は次のように表現される：

$$(x+1, y-20) \succ (x, y)$$

$$(x+1, y) \succ (x+2, y-20)$$

ここで、x はこの人が最初に持っている靴の数で、y は最初に持っている財産である。
ここから、x と $x+1$ の区間は $x+1$ と $x+2$ の区間よりも大きい、つまり追加の靴の限界効用は逓減しているということができる。

このように加法的測定は A_1, A_2 上の差測定に帰着できる。6 章での実際の証明は差測定ではなく外延的測定に帰着しているが、これは単に証明が短くなるから。

もう一つ、区間の順序を導く例として、unfolding (Coombs,1952)というのがある。

集合 S に含まれる被験者 s によって、集合 A の要素の選好順序づけ $\succsim_s$ が行われたとき、これを区間 as の単一の順序づけと解釈する。そこから間接的に、集合 A 上の区間の順序を導出する。

例えば、 $b \succsim_s a \succsim_s c$ かつ $b \succsim_{s'} c \succsim_{s'} a$ とすると、＊

これらを直線上に並べるためには、b が a と c の中間に位置しなければならない。
従って、区間を絶対差と考えれば、 $ac \gtrsim ab, bc$ となる（◆4.12 節）

4.1.3 Axiomatization of Difference Measurement

Hölder (1901) にて直線上の区間の測定は外延的測定に帰着できることが示されている。
基本となるアイデア：

外延的測定での標準系列は $a, a \circ a, a \circ a \circ a, \cdots$ であった

差測定での標準系列を $a_1, a_2, a_3, \cdots$ ここで $a_2a_1 \sim a_3a_2 \sim \cdots$

a_2a_1 は外延的測定での a にあたると考えれば、 a_3a_1 は $a \circ a$

一般に、同値"~"な区間たちは同値類にて同定される。同値類の結合(concatenate)を、2 つの類のそれぞれに属する区間で端と端をあわせられるものを選んで、つなげた区間の同値類をとることで、定義する。

筆者と Hölder の違い：１．有界な直線のケースを考えている。２．標準系列の精密化を考慮している

逆に、差測定を証明してから外延的測定を差測定に帰着させることもできる、例えば、 $a \circ d \succsim b \circ c \Leftrightarrow ab \succsim cd$ と定義して。

以降の節で紹介される公理系の概略；

まず、正差構造(positive-difference structure)。◆4.2、4.3 節
表現される関係構造にて、差の方向の概念が含まれている。もし ab が正差なら ba はそう

ではない。これは Hölder が、"von gleicher Richtung" の線分、と呼んだやり方。
表現定理は、 ab, cd が正差のとき $ab \succsim cd \Leftrightarrow \phi(a)-\phi(b) \geq \phi(c)-\phi(d)$

次に、代数差構造(algebraic-difference structure)。◆4.4、4.5 節
ab も ba も両方順序に含まれていて、差の符号反転に伴う不等式反転の仮定が入る：
$ab \succsim cd \Rightarrow dc \succsim ba$
表現定理は、$ab \succsim cd \Leftrightarrow \phi(a)-\phi(b) \geq \phi(c)-\phi(d)$。符号に関係なくすべてのペアで成立する。
代数差構造についての定理は、正差構造に帰着される。

同じ 4.4、4.5 節にて、差構造についての別の数的表現（差ではなく比を使うもの)、および、差と比の両方の表現を要する二重構造を論じる。
また、同値が無い場合（狭義の不等号のみの場合）でも差構造について間隔尺度表現が得られることを示す。これは正確な標準系列が作れない場合に近似的標準系列でやる方法。
◆4.6、4.7 節では、代数差の応用として精神物理学のクロスモダリティマッチングを取り上げる。

次に、有限等間隔差構造(finite, equally spaced difference structure)。◆4.8、4.9 節
代数差構造に似ているが、より初歩的なやり方で扱える。教育的利点。

次に、絶対差構造(absolute-difference structure)。◆4.10、4.11 節
正差構造の表現は $ab \succsim cd \Leftrightarrow |\phi(a)-\phi(b)| \geq |\phi(c)-\phi(d)|, \phi(a)>\phi(b), \phi(c)>\phi(d)$ と書くこともできる。
一般化して、絶対差構造の表現は $ab \succsim cd \Leftrightarrow |\phi(a)-\phi(b)| \geq |\phi(c)-\phi(d)|$
絶対差構造は、◆11〜13 章の多次元距離表現においても重要となる。

最後に、強条件付き絶対差構造(strongly conditional absolute-difference structure)。◆4.12、4.13 節
$A \times A$ 上の順序が条件付き連結(conditionally connected, 3.12 節)の場合、すなわち、ペアの第 2 要素が同一のときのみ比較ができる場合($ac, bc, dc, \cdots$)
例えば、上記の unfolding ＊
あるいは、刺激 a,b のどちらが基準 c と似ているかを判断させる場合。もっと一般化すると "cartwheels" (Coombs, 1964)
このようなデータから、 ac と bd の比較($c \neq d$)について推論し、絶対差に帰着する。

4.2 POSITIVE-DIFFERENCE STRUCTURES

定義 1 (正差構造)

A を空でない集合、A^* を $A \times A$ の空でない部分集合、$\succsim$ を A^* 上の二項関係、とする。$\langle A, A^*, \succsim \rangle$ は、すべての $a,b,c,d,a',b',c' \in A$ およびすべての列 $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots \in A$ について次の 6 公理が成り立つとき、そのときに限り、<u>正差構造</u>である：

1. $\langle A^*, \succsim \rangle$ は弱順序である
2. $ab, bc \in A^* \Rightarrow ac \in A^*$
3. $ab, bc \in A^* \Rightarrow ac \succ ab, bc$
4. $ab, bc, a'b', b'c' \in A^* \wedge ab \succsim a'b' \wedge bc \succsim b'c' \Rightarrow ac \succsim a'c'$
5. $ab, cd \in A^* \wedge ab \succ cd \Rightarrow \exists d', d'' \in A\,(ad', d'b, ad'', d''b \in A^* \wedge ad' \sim cd \sim d''b)$
6. $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ が狭義有界な標準系列である[1]ならば、有限である

第 1 の公理は見たまま、弱順序。

第 2 の公理で、A^* は A 上の推移関係である。直線上の点の例からすると A^* は全順序と期待されるが、条件付き確率のような例を考えるともっと一般的な定理が求められる。実際、もし A^* が半順序なら、A^* 上の比尺度 ψ が得られるだけだが、全順序なら間隔尺度 ϕ による差表現 $\psi(ab) = \phi(a) - \phi(b)$ を得られる。

「正」(positive)という語は、A^* が狭義の（＝非反射的な）半順序であること、すなわち $aa \notin A^*$ を意味する。これは明示的に公理に入っていないが、第 3 の公理から出てくる。さらに、推移的で非反射的な関係は常に反対称的であることに注意。

第 3 と第 4 の公理がこの系の核心。第 3 の公理は見たまま。

第 4 の公理は弱単調性条件。図 1 を参照。いろんな意味を持つ。1 つには、整合性のための $ab \sim a'b' \wedge bc \sim b'c' \Rightarrow ac \sim a'c'$（上述）を $\succsim$ に拡張したもの。あるいは、正差測定を外延的測定に帰着させるために、結合(concatenation)の定義を可能にするもの。また、定義 2.2 の単調性条件（公理 3,4）を満たすもの。などなど。

第 5 の公理は可解性条件。第 6 の公理はアルキメデス性条件。

定理 1 (正差構造の表現と一意性)

$\langle A, A^*, \succsim \rangle$ が正差構造であるとき、すべての $a,b,c,d \in A$ について

---

[1] $\forall a_i, a_{i+1} (a_{i+1} a_i \in A^* \wedge a_{i+1} a_i \sim a_2 a_1) \wedge \exists d'd'' \in A^* \forall a_{i+1} (d'd'' \succ a_{i+1} a_1)$

(i) $ab, cd \in A^* \Rightarrow (ab \succsim cd \Leftrightarrow \psi(ab) \geq \psi(cd))$

(ii) $ab, bc \in A^* \Rightarrow \psi(ac) = \psi(ab) + \psi(bc)$

が成り立つような関数$\psi : A^* \to \mathrm{Re}^+$が存在する。

関数ψ'も同じ性質を持つならば、$\psi' = \alpha\psi$となる定数$\alpha > 0$が存在する。

さらに、すべての$a, b \in A, a \neq b$について$ab \in A^*$または$ba \in A^*$が成り立つならば、すべての$cd \in A^*$について

$$\psi(cd) = \phi(c) - \phi(d)$$

が成り立つような関数$\phi : A \to \mathrm{Re}$が存在する。

関数ϕ'も同じ性質を持つならば、$\phi' = \phi + \beta$となる定数βが存在する。

外延的測定に帰着させるという証明方法のために、同値類$\mathbf{ab}$、商集合$\mathbf{A}^*$、$\mathbf{A}^*$上の順序$\geqq$、結合を表す同値類ペアの集合$\mathbf{B}$と関数$\circ : \mathbf{B} \to \mathbf{A}^*$を定義している(定義4.2)。これにより、$\langle \mathbf{A}^*, \geqq, \mathbf{B}, \circ \rangle$がアルキメデス正則正値順序付き局所半群（定義 2.2）であることから、定理 2.4 により $\psi : A^* \to \mathrm{Re}^+$ が構成できる。そこから $\phi : A \to \mathrm{Re}$ を構成するのは容易。

$\phi : A \to \mathrm{Re}$については、もう少し弱い条件で構成することもできる。二項関係$b\ E\ b'$を、

$b\ E\ b' \Leftrightarrow \forall a \in A\ (\ (ab, ab' \in A^* \wedge ab \sim ab') \vee (ba, b'a \in A^* \wedge ba \sim b'a) \vee ab, ab', ba, b'a \notin A\ )$

と定義すると、$\forall a, b\ (a\ E\ b \vee ab \in A^* \vee ba \in A^*)$という仮定の下で、$\phi$が構成可能。

4.3 PROOF OF THEOREM 1

(ry

4.4 ALGEBRAIC-DIFFERENCE STRUCTURES

正と負の区間を含む構造について、$\phi(a) - \phi(b)$による表現、$\phi(a)/\phi(b)$による表現を与える。

問題：同じ集合A上の区間について 2 つの異なる順序づけがあったとき、一方には差表現を与えもう一方には比表現を与えるような単一の尺度を構成可能だろうか？
感覚判断における「差」教示と「比」教示という応用が考えられる。

4.4.1 Axiom System and Representation Theorem

定義 3 (代数差構造)

Aを空でない集合、$\succsim$をA上の四項関係（$A\times A$上の二項関係）とする。$\langle A\times A,\succsim\rangle$は、すべての$a,b,c,d,a',b',c'\in A$およびすべての列$a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots\in A$について次の 5 公理が成り立つとき、そのときに限り、<u>代数差構造</u>である：

1. $\langle A\times A,\succsim\rangle$は弱順序である
2. $ab\succsim cd \Rightarrow dc\succsim ba$
3. $ab \succsim a'b' \wedge bc \succsim b'c' \Rightarrow ac \succsim a'c'$
4. $ab\succsim cd\succsim aa \Rightarrow \exists d',d''\in A\,(ad'\sim cd\sim d''b)$
5. $a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots$が狭義有界な標準系列である[2]ならば、有限である

定理 2 (代数差構造の表現と一意性)

$\langle A\times A,\succsim\rangle$が代数差構造であるとき、すべての$a,b,c,d\in A$について

$$ab\succsim cd \Leftrightarrow \phi(a)-\phi(b)\geq \phi(c)-\phi(d)$$

が成り立つような関数$\phi: A\rightarrow \mathrm{Re}$が存在する。

さらに、ϕは正の線形変換を除いて一意である。すなわち、ϕ'がϕと同じ性質を持つならば、$\phi'=\alpha\phi+\beta$となる実数定数$\alpha>0,\beta$が存在する。

証明のために、$ab\in A^* \Leftrightarrow ab\succ aa$として$A^*$やその上の順序や同値関係を定義し（定義 4）、正差構造に帰着させる。

4.4.2 Alternative Numerical Representation

ϕが定理2を満たすなら、$\psi=e^{\phi}$は比表現$ab\succsim cd \Leftrightarrow \psi(a)/\psi(b)\geq \psi(c)/\psi(d)$を与える。逆に、上を満たすどんな正値関数$\psi$からも、対数を取ることで差表現$\phi$を得られる。

より一般的に、LをRe上の区間とし、$f:\mathrm{Re}\rightarrow L$を狭義単調増加関数とする。$\psi$と$\oplus$を

$$\psi(a)=f[\phi(a)],\quad a\in A$$

$$x\oplus y=f[f^{-1}(x)-f^{-1}(y)],\quad x,y\in L$$

と定義する。これより、

$$\psi(a)\oplus\psi(b)=f[\phi(a)-\phi(b)]$$

---

[2] $\forall a_i, a_{i+1}(a_{i+1}a_i\sim a_2a_1)\wedge \exists d',d''\in A\forall a_i(d'd''\succ a_ia_1\succ d''d')$

従ってψは、$\succsim$を$\oplus$の値の順序で定義される数的関係に移す準同型写像。つまり、同等な数的表現を幅広く選ぶことができ、便利な代案の１つが$L = \mathrm{Re}^{+}, f = \exp$とした比表現。

ψによる表現は、実数$\alpha > 0, \beta$での変換$T_{\alpha,\beta} = f(\alpha f^{-1} + \beta)$の下で不変である。このような変換全体の集合は、$T_{1,0}$を単位元、$T_{1/\alpha,-\beta/\alpha}$を$T_{\alpha,\beta}$の逆元とする２パラメータ群である。

4.4.3 Difference-and-Ratio Structures

差表現か、比表現か、あるいはその他の表現かという選択は簡便性の問題。
しかし、$A \times A$に$\succsim_1$と$\succsim_2$の２つの順序が備わっている場合、片方に差表現、もう片方に比表現となる１つの尺度ϕが作れるとしたらどんな時か？

ϕ_1を$\succsim_1$の差表現､ϕ_2を$\succsim_2$の比表現とすると､$\alpha_1(\phi_1 + \beta), \alpha_2 \phi_2^{\gamma}$もそれぞれ$\succsim_1$の差表現､$\succsim_2$の比表現である。つまり、上の問題は、

$$\alpha_1(\phi_1 + \beta) = \phi = \alpha_2 \phi_2^{\gamma}$$

を満たすような$\alpha_1, \alpha_2, \beta, \gamma$を取れるのはどんな時か、という問題である。

定理 3 (差と比の二重表現と一意性)

$\succsim_1$と$\succsim_2$をそれぞれ集合A上の四項関係とし、$\langle A \times A, \succsim_1 \rangle$と$\langle A \times A, \succsim_2 \rangle$が代数差構造であるとする。すべての$a, b, c, a', b', c' \in A$について

$$ab \succsim_1 aa \Leftrightarrow ab \succsim_2 aa$$
$$(aa' \succsim_2 bb' \wedge cc' \succsim_2 bb') \Rightarrow (a'b' \succsim_1 b'c' \Rightarrow ab \succsim_1 bc)$$

が成り立つと仮定するとき、すべての$a, b, c, d \in A$について次を満たす関数$\phi : A \to \mathrm{Re}$が存在する：

(i) $ab \succsim_1 cd \Leftrightarrow \phi(a) - \phi(b) \geq \phi(c) - \phi(d)$

(ii) $ab \succsim_2 cd \Leftrightarrow \phi(a)/\phi(b) \geq \phi(c)/\phi(d)$

さらに、ϕ'も同じ性質を持つ関数ならば、$\phi' = \alpha\phi$となる$\alpha > 0$が存在する。

応用例として、感覚の差を評定するよう教示された場合と比を評定するよう教示された場合を考える。極端な可能性の１つは、2 種類の教示は同じ順序づけを生成し、単に実験者に差表現もしくは比表現を使用させるだけ、というケース。この場合、得られた 2 種類の尺

度は $\phi_2 = e^{\phi_1}$ という関係になる。Torgerson(1961)は、これが精神物理学で実際に起こっていることだと主張したし、Birnbaum(1980)はこのようになっていることへのかなり確信的な証拠を出した。
もう 1 つの可能性は、参加者が別々の順序 $\succsim_1$、$\succsim_2$ を生成すること(Rule, Cyrtis, & Mullin, 1981)。これらの順序が定理 3 の条件を満たしているなら、参加者はあたかも感覚の数的な差や比を判断しているかのように実際に行動している。

4.4.4 Strict Inequalities and Approximate Standard Sequences

不等関係だけに基づいて、差構造の間隔尺度を得る。
同等関係の観察は信頼性が低いあるいは得るのが難しい場合がよくあるので、これは重要である。
完全な敏感性を持たない比較方法を使っている結果として、信頼性の低さは必然的。例えば、2 つの物が同じ重さだと判断されたとしても、より精度の高い天秤を使えば違いが明らかになる。
不等関係は同等関係よりも判断や解釈が単純である。例えば、$ab \succ cd$ を、\$$a$ 使って\$$b$ 貯金するほうが\$$c$ 使って\$$d$ 貯金するよりも好ましい、ということを表すものとする。\$$a$ 使って\$$b$ 貯金したという行動を観察した場合、$x + y = a + b$ を満たすすべての x, y について $ab \succ xy$ だと推論するだろう。しかし、無差別(indifference)については、そのような観察から推測する単純な方法はない。実験状況で例えば $ab \sim cx$ となるような x を選ぶよう教示されても、その過程は複雑なものになり、無差別を反映する単純な行動というのは見あたりにくい。つまり、理論的にも実践的にも無差別判断を要しない理論は望ましい。

測定において同値関係を使わないようにするために、数的表現の構成のどこでそれが使われているのかを調べ、構成を修正する。
可解性（定義 1 の公理 5、定義 3 の公理 4）の役割は、その「網目」が区間 cd にあたるような、そして区間 ab の近似に使えるような、標準系列の存在を示すこと。つまり、$ab \succsim cd \succsim aa$ のとき、可解性によって、$b'b \sim cd$ となるような b' が存在する。それでもまだ $ab' \succsim cd$ ならば、さらに可解性によって $b''b' \sim cd$ が存在する。この過程は標準系列 $b, b', b'', \ldots, b^{(n)}$ で $cd \succ ab^{(n)}$ となるような $b^{(n)}$ にて終わる。つまり、ab を近似するために cd をコピーする回数を見つけること。

このやり方では、正確な標準系列は作れず、近似的なものとなる。

区間 $cd \succ cc$ について、$\mathscr{G}(cd)$ を、網目が cd 以上の列の族とする。すなわち、列 $\{a_i\}$ が $\mathscr{G}(cd)$ に含まれるならば、$\{a_i\}$ のすべての a_n, a_{n+1} について $a_{n+1}a_n \succsim cd$ である。同様に、

$\mathscr{L}(cd)$ を網目が cd 未満（すなわち $cd \succ a_{n+1}a_n$ ）の列の族とする。明らかに、正確な標準系列はもし存在するなら $\mathscr{G}(cd)$ に含まれる。

ここで、可解性とアルキメデス性の公理（定義 3 の公理 4,5）を次のように修正する：

4′. $ab \succsim cd \succsim c'd' \succsim aa \Rightarrow \exists x, y \in A\,((cd \succ ay \succ c'd') \wedge (cd \succ xb \succ c'd'))$

5′. $cd \succ cc$ であり、列 $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ が $\mathscr{G}(cd)$ に含まれ、列のすべての a_i について $ab \succ a_i a_1$ ならば、列は有限である

公理 4′は x, y について等式（$cd \sim ay, cd \sim xb$）ではなく不等式が可解だと述べている。これは集合 A がある意味で稠密である（いかなる 2 つの同等でない点の間にも第 3 のそれらと同等でない点が存在する）ことを意味する。不等関係が同等関係よりも観察しやすいとき、この公理は公理 4 よりも検証が容易である。＊ （公理の検証の問題は◆17 章）

公理 5′は、もとのアルキメデス性公理よりも少々強い（クラスが広いため）。

代数差構造の定義の公理 4,5 をこれら 4′,5′に置き換えても、定理 2 は有効である。

$a_1, \ldots, a_{m+i}$ は $\mathscr{L}(cd)$ に含まれる列で $a_{m+i}a_1 \succsim ab$ が成り立ち、$b_1, \ldots, b_m$ は $\mathscr{G}(cd)$ に含まれる列で $ab \succsim b_m b_1$ が成り立つとき、

$$m[\phi(c) - \phi(d)] \geq \phi(a) - \phi(b) \geq (m-1)[\phi(c) - \phi(d)]$$

従って、 $a_1, \ldots, a_{m+i}$ と $b_1, \ldots, b_m$ は「網目」 cd でもって区間 ab に近似すると考えられる。

ϕ の構成は定理 2.4 に同じ。ϕ が有限の観察から予め定められた正確性でもって近似されることの証明は◆エクセサイズ 9-15。

4.5 PROOFS

(ry

4.6 CROSS-MODALITY ORDERING

代数差構造をちょっと拡張して、集合

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times A_i$$

の上に $\succsim$ が定義されている場合を考える。

$A_1,\ldots,A_m$ を異なる感覚連続体（異なるモダリティやサブモダリティ）とする。例えば、A_1 は一定方向で長さの異なる線分の集合、A_2 は一定の分光組成で輝度の異なる白色光の集合、A_3 は一定の周波数で音圧の異なる純音の集合、等々。

参加者は $A_1 \times A_1$ に含まれる対 a_1b_1 の関係（感覚の比）を $A_2 \times A_2$ に含まれる対 a_2b_2 の関係（感覚の比）と比較することが求められる、等々。
例えば、感覚の比 a_1b_1、a_2b_2 等々を数的評定尺度にて評定させるということもあるだろう。

実際の実験では、クロスモダリティマッチングというちょっと違った方法も使われる：参加者は、A_2 に含まれるある光の明るさ感覚について、A_3 に含まれる音の大きさ感覚の適当なものを選び出して、マッチさせる。等々。

このようなクロスモダリティマッチングデータからの経験的関係（$\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times A_i$ 上の順序 $\succsim$）の導出は、参加者が感覚の「比」をマッチさせることで実際にマッチングタスクをこなしているという、特定の理論的解釈に基づくものである。言うなれば、もし、a_2 を c_3 とマッチさせ、b_2 を d_3 とマッチさせたなら、これは、刺激 a_2 が刺激 c_3 と同等の感覚を生じさせたという証拠ではなく、a_2 と b_2 の知覚された関係（感覚の比）が c_3 と d_3 の関係と同等であること（すなわち $a_2b_2 \sim c_3d_3$）の証拠と取られる。

この解釈に従って、クロスモダリティマッチングは $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times A_i$ 上の同値関係 $\sim$ を定める。
$\sim$ から $\succsim$ への拡張のされ方は色々ある。例えば、参加者は対を 1 つのモダリティ（A_1）で順序づけ、他のモダリティは $A_1 \times A_1$ とのマッチングで順序づけられる、と仮定するなど。（この理論的解釈のさらなる議論は Krantz,1972a）

定義 5 (クロスモダリティ順序づけ構造)

$A_1,\ldots,A_m$ をそれぞれ空でない集合、$\succsim$ を $\bigcup_{i=1}^{m} A_i \times A_i$ 上の二項関係とする。

$\langle A_1,\ldots,A_m,\succsim\rangle$ は、すべての $1 \le i, j \le m$、すべての $a_i, b_i, c_i \in A_i$、およびすべての

$a'_j, b'_j, c'_j \in A_j$について次の 5 公理が成り立つとき、そのときに限り、クロスモダリティ順序づけ構造である：

1. $\left\langle \bigcup_{i=1}^{m} A_i \times A_i, \succsim \right\rangle$は弱順序である

2. $a_i b_i \succsim a'_j b'_j \Rightarrow b'_j a'_j \succsim b_i a_i$

3. $a_i b_i \succsim a'_j b'_j \wedge b_i c_i \succsim b'_j c'_j \Rightarrow a_i c_i \succsim a'_j c'_j$

4. (i) $\exists d_1, e_1 \in A_1\ (a_i b_i \sim d_1 e_1)$

   (ii) $\langle A_1 \times A_1, \succsim \rangle$[3]が定義 3 の公理 4 を満たす

5. $\langle A_1 \times A_1, \succsim \rangle$が定義 3 の公理 5 を満たす

公理 2 は符号逆転、公理 3 は弱単調性、公理 4 は可解性、公理 5 はアルキメデス性を意味する。定義 3 に似ている。キーポイントは、弱単調性がクロスモダリティ版になったこと。公理 4,5 ではA_1のみについて述べている。$\langle A_1 \times A_1, \succsim \rangle$が代数差構造と仮定しており、$\langle A_i \times A_i, \succsim \rangle$を各々$\langle A_1 \times A_1, \succsim \rangle$へ写像できる。

定理 4 (クロスモダリティ順序づけ構造の表現と一意性)

$\langle A_1, \ldots, A_m, \succsim \rangle$がクロスモダリティ順序づけ構造であるとき、すべての$1 \le i, j \le m$、

$a_i, b_i \in A_i$、および$a'_j, b'_j \in A_j$について

$$a_i b_i \succsim a'_j b'_j \Leftrightarrow \phi_i(a_i)/\phi_i(b_i) \ge \phi_j(a'_j)/\phi_j(b'_j)$$

が成り立つような関数$\phi_i : A_i \to \mathrm{Re}^+, i = 1, \ldots, m$が存在する。

さらに、関数$\phi'_i, i = 1, \ldots, m$が同じ性質を持つならば、$\phi'_i = \alpha_i \phi_i^{\gamma}, i = 1, \ldots, m$となる正の

[3] ここで$\langle A_1 \times A_1, \succsim \rangle$は$\left\langle \bigcup_{i=1}^{m} A_i \times A_i, \succsim \right\rangle$から$A_1 \times A_1$への制限である

数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\gamma$ が存在する。

論理的には差表現でなく比表現をとるのは恣意的だが、感覚「比」教示の慣例に沿うもの。

許容される変換 $\phi_i \to \alpha_i \phi_i^{\gamma}$, $i=1,\ldots,m$ にて、γ は i と独立である。

4.7 PROOF OF THEOREM 4

(ry

4.8 FINITE, EQUALLY SPACED DIFFERENCE STRUCTURES

これを考える動機づけは、
1. 有限な標準系列でもって近似的に測定を行うことがある。
2. 数学に精通していなくても追いやすい証明ができる。

定義 6 (隣接関係)

$\langle A\times A, \succsim \rangle$ が定義 3 の公理 1～3 を見たすとする。A^* を定義 4 と同様に定義する。A 上の関係 J を次のように定義する：すべての $a,b \in A$ について、

$$a\ J\ b \Leftrightarrow ab \in A^* \wedge \neg\exists c \in A\,(ac, cb \in A^*)$$

定義 7 (有限等間隔差構造)

A を空でない有限集合、$\succsim$ を $A\times A$ 上の二項関係とする。$\langle A\times A, \succsim \rangle$ は、すべての $a,b,c,d,a',b',c' \in A$ について次の 4 公理が成り立つとき、そのときに限り、<u>有限等間隔差構造</u>である：

1. $\langle A\times A, \succsim \rangle$ は弱順序である
2. $ab \succsim cd \Rightarrow dc \succsim ba$
3. $ab \succsim a'b' \wedge bc \succsim b'c' \Rightarrow ac \succsim a'c'$
4. $a\ J\ b \wedge c\ J\ d \Rightarrow ab \sim cd$

ポイントは公理 4。強い。棒を選ばんとね。

定理 5 (有限等間隔差構造の表現と一意性)

$\langle A\times A, \succsim\rangle$ が有限等間隔差構造であるとき、定理 2 の結論が成り立つ。すなわち、すべての $a,b,c,d\in A$ について

$$ab \succsim cd \Leftrightarrow \phi(a)-\phi(b)\geq \phi(c)-\phi(d)$$

が成り立つような関数 $\phi : A\rightarrow \mathrm{Re}$ が存在し、ϕ は正の線形変換を除いて一意である。さらに、これらの条件を満たしつつ整数値をとる ϕ が存在する。

4.9 PROOFS

(ry

4.10 ABSOLUTE-DIFFERENCE STRUCTURES

多次元表現の存在（11〜13 章）の証明の基盤としても重要。

定義 8 (絶対差構造)

A を少なくとも 2 つの要素を含む集合、$\succsim$ を $A\times A$ 上の二項関係、とする。$\langle A\times A, \succsim\rangle$ は、すべての $a,b,c,d,a',b',c'\in A$ およびすべての列 $a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots\in A$ について次の 6 公理が成り立つとき、そのときに限り、<u>絶対差構造</u>である：

1. $\langle A\times A, \succsim\rangle$ は弱順序である
2. $a\neq b \Rightarrow ab\sim ba\succ aa\sim bb$
3. (i) $b\neq c\wedge(ac\succsim ab,bc)\wedge(bd\succsim bc,cd)\Rightarrow ad\succsim ac,bd$
   (ii) $(ac\succsim ab,bc)\wedge(ad\succsim ac,cd)\Rightarrow ad\succsim bd$
4. $ac\succsim ab,bc$ と仮定するとき、
   $ab\succsim a'b'\wedge bc\succsim b'c'\Rightarrow ac\succsim a'c'$
   $ab\succ a'b'\wedge bc\succ b'c'\Rightarrow ac\succ a'c'$
5. $ab\succsim cd\Rightarrow \exists d'\in A\,(ab\succsim d'b\wedge ad'\sim cd)$
6. $a_1,a_2,\ldots,a_i,\ldots$ が狭義有界な標準系列である[4]ならば、有限である

[4] $\exists d',d''\in A\,(\forall a_i,a_{i+1}(d'd''\succ a_{i+1}a_1\succsim a_ia_1\wedge a_{i+1}a_i\sim a_2a_1\succ a_1a_1))$

公理 3〜6 は中間性の概念を定義することにより、もっと分かり易く書き直すことが出来る。

定義 9 (中間性)

$\langle A\times A, \succsim \rangle$ が定義 8 の公理 1 と 2 を満たすとする。$ac \succsim ab, bc$ が成り立つとき、そのときに限り、b は a と c の<u>中間 (between)</u> であると言う。これを $a\,|\,b\,|\,c$ と表記する。

公理 2 により、中間性は 1 番目と 3 番目の変数について対称である（$a\,|\,b\,|\,c \Leftrightarrow c\,|\,b\,|\,a$）。さらに、任意の a,b,c について、$a\,|\,b\,|\,c$ または $a\,|\,c\,|\,b$ または $b\,|\,a\,|\,c$ の少なくとも 1 つが必ず成り立つ。

公理 3 の書き換え：
(i) $b \ne c \wedge a\,|\,b\,|\,c \wedge b\,|\,c\,|\,d \Rightarrow a\,|\,b\,|\,d \wedge a\,|\,c\,|\,d$
(ii) $a\,|\,b\,|\,c \wedge a\,|\,c\,|\,d \Rightarrow a\,|\,b\,|\,d$

公理 4 の書き換え：
$a\,|\,b\,|\,c \wedge a'\,|\,b'\,|\,c' \wedge ab \sim a'b' \Rightarrow (bc \succsim b'c' \Leftrightarrow ac \succsim a'c')$

公理 5 の書き換え：
$ab \succsim cd \Rightarrow \exists d' \in A\,(a\,|\,d'\,|\,b \wedge ad' \sim cd)$

公理 6 から、$a_{i+1}\,|\,a_i\,|\,a_1$

A 上の順序は、別々の固定の要素 x, y を選んで xy を「正の」区間として(恣意的に)指定することにより定義される。他の正の区間は、 xy との相対で、中間性を用いて定義される。

定義 10 (絶対差構造から正差構造の取り出し)

$\langle A\times A, \succsim \rangle$ を絶対差構造とする。別々の要素 $x, y \in A$ を選ぶ。 A^* を、次の 3 条件の少なくとも 1 つが成り立つような、すべての $ab \in A\times A$ の集合と定義する：

(i) $a\,|\,x\,|\,y \wedge b\,|\,x\,|\,y \wedge ax \succ bx$
(ii) $\neg(a\,|\,x\,|\,y) \wedge \neg(b\,|\,x\,|\,y) \wedge bx \succ ax$
(iii) $a\,|\,x\,|\,y \wedge \neg(b\,|\,x\,|\,y)$

また、$\succsim^*$ を $\succsim$ の A^* への制限とする。

こうして作られた$\langle A, A^*, \tilde{\succ}^* \rangle$は正差構造であり、定理 1 を通じて次の表現定理と一意性定理が得られる。

定理 6 (絶対差構造の表現と一意性)

$\langle A \times A, \tilde{\succ} \rangle$が絶対差構造であるとき、すべての$a,b,c,d \in A$について

$$ab \tilde{\succ} cd \Leftrightarrow |\phi(a) - \phi(b)| \ge |\phi(c) - \phi(d)|$$

が成り立つような関数$\phi : A \to \mathrm{Re}$が存在する。
関数ϕ'も同じ性質を持つならば、$\phi' = \alpha\phi + \beta$となる実数$\alpha \ne 0, \beta$が存在する。

4.11 PROOFS

(ry

4.12 STRONGLY CONDITIONAL DIFFERENCE STRUCTURES

共通の端点を持つ区間同士だけが比較されるケース（その意味で区間の順序づけが条件付き連結 conditionally connected）。
例えば、２つの刺激について基準と類似性に関して比較判断させる場合。もっと一般には、２つではなく n 個の刺激(cartwheels)。この場合はペア毎の判断のような代替的方法を用いて順序づけを得ることができるかもしれない。
しかし、前に挙げた、選好順序を絶対差の順序として解釈するような場合は、そうできない。刺激 a に対する参加者 s の好みを刺激 b に対する参加者 t の好みと比べる直接的方法がない。
もう１つよくある例は、ペアを順序づけする方法に内在的な非対称性がある場合。例えば、刺激$s_1, \ldots, s_m$にそれぞれ反応$r_1, \ldots, r_m$を割り当てて、参加者にs_iに対してr_iで応じてもらう。いろんな理由でエラーが発生する（$s - r$ペアの学習ミス、刺激強度の変動、漸近パフォーマンスなど）。s_iに対してr_kが起こる頻度は、s_iとs_kの類似性の測度と解釈されることがある。正確には、s_jよりもs_iに対してより多くr_kが起こるならば、$s_j s_k \succ s_i s_k$ すなわち区間$s_i s_k$のほうが区間$s_j s_k$よりも小さいと結論する。しかしながら、s_iに対してr_kが起こる頻

度がs_jに対してr_lが起こる頻度よりも多いときに、$s_j s_l \succ s_i s_k$とは結論しない。なぜなら、単に全体的な反応バイアスを反映しているだけかもしれないから。s_lに対するr_kのほうがs_kに対するr_lより多かったり、全体的にr_kがr_lより多かったりすると、このバイアス解釈はかなりもっともらしい。

これへの対処の１つは、complete-identification 行動についてバイアスを考慮に入れた理論を定式化し、それをペアの順序づけの抽出に使う道(ex.Luce,1963)。ただこれは理論のチェックが難しく手に余る。

もう 1 つの対処法は、条件付き連結な順序から何とかする道。s_iに対するr_kの頻度を(i,k)成分とする行列で言えば、行列の各列での成分の順序だけを使うことになる。この例は多い。（Coombs, 1964, 19 章を参照）

以降この節では、集合Aと$A \times A$上の二項関係$\succsim$をプリミティブとし、2 番目の要素が共通のペア間についてのみ連結であると考える。すなわち、$c = d$のとき、そのときに限り、acとbdは比較可能である。これが強条件付き連結性である。

目指す表現は

$$ac \succsim bc \Leftrightarrow |\phi(a) - \phi(c)| \geq |\phi(b) - \phi(c)|$$

強条件付きの代数差構造を考えることもできるが、絶対差構造のほうが選好についての Coombs の理論とのつながりが自然であり、興味深く見える。ただ、この選好の理論では$A \times S$上の二項関係なのだが、筆者が以下考察するのは$A \times A$上の関係である。よって参加者もAの要素だと考え、理想点を表すものとする。Coombs の理論の完全な公理化を成しているわけではない。

筆者の方略は、$\succsim$から連結性の$\succsim^*$への拡張（$\succsim$が$\succsim^*$についての情報をいくらか持っているはず）。そこでまず、中点、中間性、端点の定義を行う。

定義 11 (中点)

～を$A \times A$上の対称な二項関係とする。$a,b \in A$について、次の 2 条件のどちらかが成り立つとき、そのときに限り、cをaとbの<u>中点(midpoint)</u>と呼ぶ：

(i) $a = b = c$

(ii) $a \neq b \wedge ac \sim bc$

定義 12 (中間性と端点)

$\tilde{\succ}$ を $A \times A$ 上の二項関係とする。$ac \,\tilde{\succ}\, bc \wedge ca \,\tilde{\succ}\, ba$ が成り立つとき、そのときに限り、b は a と c の <u>中間(between)</u> であると言い、$a|b|c$ と記す。$X \subset A$ において、$\forall x, y \in X\ (x|y|a \vee y|x|a)$ が成り立つとき、そのときに限り、$a \in A$ は X の<u>端点</u>である。

これは定義 9 の強条件付き連結バージョンであり、$a|b|c$ と $c|b|a$ が同値であることは前と同じである。しかし、任意の a,b,c が与えられたときにどれか 1 つが他の 2 つの中間であるということは、もはや成り立たない。例えば $ac \succ bc \wedge ba \succ ca \wedge cb \succ ab$ はあり得る。定義 14 の公理系では公理 2〜4 でこの可能性を排除しており、どれか 1 つは中点となる。

$a_1 | a_2 | \cdots | a_n$ という表記で、この順ですべての三項中間性が成り立つ（すなわち、すべての $1 \le i \le j \le k \le n$ において $a_i | a_j | a_k$ ）ことを表すものとする。(◆補題 19)

これで強条件付き連結性の $\tilde{\succ}$ から連結性の $\tilde{\succ}^*$ を定義する準備ができた。

まず簡単なのは、c,d が a と b の中間に入れ子にされている場合（すなわち $a|c|d|b$ または $a|d|c|b$ ）である。（以下も a と b の交換、c と d の交換は除いて考える）

cd が ab に入れ子にされておらず ab が cd に入れ子にされているのでもない場合、これらの区間はバラバラであるか噛み合っている。すなわち 1) $a|b|c|d$ か 2) $a|c|b|d$ である。線分上の点で表示すれば図 2 のようになる。

（図 2）

区間 ab が区間 cd を超えるなら、そのときに限り、a から中点 $b \circ c$ までの距離は d から $b \circ c$ までの距離を超える。

定義 13 (連結性の構成)

$\tilde{\succ}$ を $A \times A$ 上の二項関係とし、〜、中点∘、三項中間性、四項中間性を上記のとおり定義する（定義 11、12 とそれに続く議論）。$a,b,c,d \in A$ について、次の 3 条件が成り立つとき、そのときに限り、$ab \,\tilde{\succ}^*\, cd$ である：

(i) $a|c|d|b \vee a|d|c|b$

(ii) $(a|b|c|d \vee a|c|b|d) \wedge \langle a, b \circ c \rangle \,\tilde{\succ}\, \langle d, b \circ c \rangle$

(iii) 条件(ii)は a と b の交換、c と d の交換の両方または一方を行っても成り立つ。

実践的には、$ab \,\tilde{\succ}^*\, cd$ かどうかを決めるのに中点 $b \circ c$ を決める必要はない。例えば

$a|b|c|d$ のとき、$b|e|c \wedge ce \succsim be \wedge ae \succsim de$ となる e を見つけたとしよう。すると、e は中点 $b \circ c$ より b 側にあり、$ae \succsim de$ なので、$(a, b \circ c) \succsim (d, b \circ c)$ となる。ゆえに $ab \succsim^* cd$ 。有限の標本では同値関係 $(b, b \circ c) \sim (c, b \circ c)$ の成り立つ中点は無いかもしれないので、$\succsim^*$ についての推論は不等関係 $ce \succsim be$ にもとづいて行われなければならない。

$\succsim^*$ の第二の特徴は(◆補題 23)、$ab \succsim^* cd$ ならば $(a \circ b, b) \succsim (c, c \circ d)$ であること。半分。従って、$(a, b \circ c) \succsim (d, b \circ c)$ の代わりに、$(a \circ b, b \circ c) \succsim (c \circ d, b \circ c)$ を使える。

$\succsim^*$ の第三の特徴は(◆補題 22)、$a|b|c$ のとき、$ab \succsim cb \Leftrightarrow a|a \circ c|b|c$。これを $a|b \circ c|d$ に適用すると、定義 13 の(ii)は $a|a \circ d|b \circ c|d$ になる。つまり、区間 ab と cd の順序は、中点 $a \circ d$ と $b \circ c$ の順序に反映される。これが Coombs の unfolding の基礎。$a|b|c|d$ がわかっているとき、参加者 s が c よりも b 、a よりも d を好んだなら、$ab \succsim^* cd$ 。

定義 14 (強条件付き絶対差構造)

A を少なくとも 2 つの要素を含む集合、$\succsim$ を $A \times A$ 上の二項関係、～、◦、および中間性を上記（定義 11、12 とそれに続く議論）のとおりとする。$\langle A \times A, \succsim \rangle$ は、すべての $a, a', b, b', c, d \in A$ およびすべての列 $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots \in A$ について次の 9 公理が成り立つとき、そのときに限り、<u>強条件付き絶対差構造</u>である：

1. $(ac \succsim bc \vee bc \succsim ac) \wedge (ac \succsim bd \Rightarrow c = d)$ (強条件付き連結性)
2. $aa \succsim ba \Rightarrow a = b$ (正値性)
3. (i) $(ad \succsim bd) \wedge (bd \succsim cd) \Rightarrow ad \succsim cd$
   (ii) $(ac \succsim bc) \wedge (cb \succsim ab) \Rightarrow ca \succsim ba$
   (iii) $(ad \succsim bd) \wedge (db \succsim cb) \wedge (bc \succsim ac) \Rightarrow da \succsim ca$ (推移性)
   さらに、前件のすべてにおいて～が成り立つ場合を除き、後件で $\succ$ が成り立つ。
4. (i) $(b \neq c) \wedge (a|b|c) \wedge (b|c|d) \Rightarrow a|b|c|d$
   (ii) $(a|b|c) \wedge (a|c|d) \Rightarrow a|b|c|d$ (中間性)
5. 中点 $a \circ b$ が存在する
6. $(a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ d) \circ (b \circ c)$ (bisymmetry)
7. c は $\{a, a', b, b'\}$ の端点 $\wedge (ac \succsim bc) \wedge (a'c \succsim b'c) \Rightarrow (a \circ b, c) \succsim (a' \circ b', c)$
   さらに前件の両方で～が成り立つ場合を除き、後件で $\succ$ が成り立つ。(弱単調性)
8. $a|b|c \Rightarrow \exists e \in A\,(b \circ e = a \circ c)$ (可解性)

9. $a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots$ が狭義有界な標準系列である[5]ならば､有限である　(アルキメデス性)

定理 7 (強条件付き絶対差構造の表現と一意性)

$\langle A \times A, \tilde{\succsim} \rangle$ が強条件付き絶対差構造であるとき、すべての $a,b,c \in A$ について

$$ac \tilde{\succsim} bc \Leftrightarrow |\phi(a) - \phi(c)| \geq |\phi(b) - \phi(c)|$$

が成り立つような関数 $\phi : A \to \mathrm{Re}$ が存在する。
関数 ϕ' も同じ性質を持つならば、$\phi' = \alpha\phi + \beta$ となる実数 $\alpha \neq 0, \beta$ が存在する。

4.13 PROOFS

(ry

EXERCISES

(ry

[5] $a_2 \neq a_1 \wedge \forall a_{i+1}, a_i, a_{i-1}(a_{i+1} \circ a_{i-1} = a_i) \wedge \exists e, f \in A\,(\forall a_i(e \mid a_i \mid f))$